Beck

Calcul de $\exp(M_n(\mathbb{C}))$ et $\exp(M_n(\mathbb{R}))$

Thm: (i) On a $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

(ii) On a $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{ M \in GL_n(\mathbb{R}),\ \exists A \in GL_n(\mathbb{R}),\ M = A^2 \}$.

dém: ① **Lemme:** Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

dém: ⓐ **Supposons M diagonalisable:**

Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $M = QDQ^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ et $d_i \neq 0$.

Soit μ_i tel que $\exp(\mu_i) = d_i$. (avec $\mu_i = \mu_j$ si $\lambda_i = \lambda_j$)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$

Alors $\exp(P(D)) = \exp\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\mu_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\mu_n) \end{pmatrix} = D$

On a alors

$$\exp(P(M)) = \exp(Q P(D) Q^{-1}) = Q$$
$$= Q \exp(P(D)) Q^{-1}$$
$$= QDQ^{-1}$$

$\exp(P(M)) = M$ et le résultat est établit pour M diagonalisable.

ⓑ Supposons M unipotente.

On pose $N = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{M^i}{i}$ qui est nilpotente.

Alors $\exp(N) = M$ et N est un polynôme en M.

Le résultat est etablit.

ⓒ **Cas général:**

Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Soient $M = DU$ la décomposition de Dunford multiplicative de M: on a donc

→ D diagonalisable

→ U unipotente

→ D et U sont des polynômes en M.

D'après ⓐ et ⓑ, il existe P et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $D = \exp(P(D))$ et $U = \exp(Q(U))$.

Comme D et U sont des polynômes en M, il existent $\bar{P}$ et $\bar{Q} \in \mathbb{C}[X]$ tels que $D = \exp(\bar{P}(M))$ et $U = \exp(\bar{Q}(M))$.

Mais alors $\underline{M = \exp((\bar{P}+\bar{Q})(M))}$ car $\bar{P}(M)$ et $\bar{Q}(M)$ commutent

d'où le lemme.

② <u>dém. de (i):</u> Cela découle du lemme.

③ <u>dém. de (ii):</u> • Soit $M \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$.

On écrit alors $M = \exp(A)$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Alors en posant $B = \underbrace{\exp\left(\frac{A}{2}\right)}_{\in GL_n(\mathbb{R})}$, on a $B^2 = \exp(A) = M$ et $\underline{M \text{ est un carré de } GL_n(\mathbb{R})}$.

• Réciproquement, on suppose que M est un carré de $GL_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A^2$.

D'après le lemme, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.

Mais alors
$$A = \bar{A} = \overline{\exp(P(A))} = \exp(\overline{P(A)}) = \exp(\bar{P}(A))$$

Or $P(A)$ et $\bar{P}(A)$ commutent donc

$$M = A^2 = \exp((P+\bar{P})(A)).$$

Or $P+\bar{P} \in \mathbb{R}[X]$ donc $(P+\bar{P})(A) \in M_n(\mathbb{R})$ et donc $\underline{M \in \exp(M_n(\mathbb{R}))}$.