

220
221
243

Equation de Bessel

- Orasse X-ENS, Analyse 4, FGM, p101

FGM4
101

On considère l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (E)$$

Il s'agit d'une eqn diff linéaire homogène d'ordre 2 scalaire

Prop: (E) admet des solutions développables en série entière en 0 de la forme:

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Dém: Soit f une solution développable en série entière en 0. Ainsi il existe une suite de réels $(a_n)_n$ et $R > 0$ tel que,

$$\forall x \in]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que f est solution de (E)

$$\text{On a: } \forall x \in]-R; R[$$

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

$$\text{donc } x f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n$$

Ainsi,

$$x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0$$

(=)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\text{on a: } a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}) x^n = 0$$

D'après l'unicité du développement en série entière, il faut que :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^+, (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1} \end{cases}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ donc les termes impairs sont nuls.

Et :

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{a_{(2n-1+1)}}{(2n-1+1)} = \frac{-a_{2n-2}}{(2n)^2} \\ &= \frac{(-1)}{(2n)^2} \times \frac{(-a_{2n-4})}{(2n-2)^2} \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2 (2n-2)^2 \dots 2^2} \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in]-R; R[$:

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Réciproquement, on montre que le rayon de convergence de cette série est non nul.

On utilise la règle de d'Alembert sur les séries numériques (et pas les séries entières)

pour $b_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$ avec $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{4^{n+1} (n+1)!^2} \times \frac{4^n n!^2}{(-1)^n x^{2n}} \\ &= \frac{-x^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1 \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence de cette série

est infini.

Donc f est solution de (E).

Puisque $f(0) = a_0$, il existe alors une unique solution

f_0 développable en série entière tel que $f_0(0) = 1$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Prop. Soit f_0 définie précédemment.

Soit f une solution de (E) sur $]0; a[$ avec $a > 0$.

Alors :

(f, f_0) est libre si f n'est pas bornée au voisinage de 0.

Dém.

$\Rightarrow$ La fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc bornée au voisinage de 0.

Ainsi si (f, f_0) est liée, alors f est bornée au voisinage de 0.

$\Rightarrow$ On suppose que (f, f_0) est libre.

Sur $]0; a[$, les solutions de (E), qui peut être écrite : $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$, est un espace vectoriel de dimension 2.

Ainsi (f, f_0) en est une base.

On considère le Wronskien W de la famille (f, f_0) :

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f_0(x) \\ f'(x) & f_0'(x) \end{vmatrix} = f(x) f_0'(x) - f_0(x) f'(x) \quad \forall x \in]0; a[$$

Soit $x \in]0; a[$. Alors :

$$W'(x) = f'(x) f_0(x) + f_0'(x) f(x) - f_0'(x) f'(x) - f_0(x) f''(x)$$

$$\S: Y' = A(t)Y, \text{ alors } W'(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$$

$$\text{ici } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{x} f_0'(x) - f_0(x) \right) f(x) - f_0(x) \left(-\frac{1}{x} f'(x) - f(x) \right)$$

$$= \frac{-1}{x} \left(f_0'(x) f(x) - f_0(x) f'(x) \right)$$

$$= \frac{-1}{x} W(x)$$

Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0, a[$,

$$W(x) = C \cdot e^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$$

Et $C \neq 0$ car (f, f_0) est libre

Ainsi $\forall x \in]0, a[$:

$$f(x) f_0'(x) - f_0(x) f'(x) = \frac{C}{x}$$

Par l'absurde, on suppose que f est bornée au voisinage de 0.

Comme $f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} f_0'(x) = 0$

$$\text{alors } f'(x) \sim -\frac{C}{x}$$

Soit $b \in]0, a[$. Alors la fonction $x \mapsto \frac{-C}{x}$ garde son signe constant sur $]0, b[$ et n'est pas intégrable sur $]0, b[$. Ainsi on peut intégrer les équivalents:

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t) dt$$

$$\sim \int_b^x \frac{-C}{t} dt = -C (\ln(x) - \ln(b))$$

$$\text{Ainsi } f(x) \sim -C \ln(x)$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

(contradiction car f bornée au voisinage de 0.)

On obtient bien l'équivalence

Remarques

1) On en déduit une autre expression pour f_0 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$$

En effet, soit g définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$$

Alors:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \cos(x \sin \theta)$ est intégrable sur $[0, \pi]$ car bornée par 1
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x \sin \theta)$ est de classe C^∞ et ses dérivées sont bornées par 1 qui est intégrable sur $[0, \pi]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

D'où:

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

$$g''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \sin^2(\theta) d\theta$$

Alors:

$$\begin{aligned} x g''(x) + g'(x) + x g(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(-x \cos(x \sin \theta) \sin^2(\theta) - \sin(x \sin \theta) \sin(\theta) + x \cos(x \sin \theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x \cos(x \sin \theta) \cos^2(\theta) - \sin(x \sin \theta) \sin(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\sin(x \sin \theta) \cos(\theta) \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Donc g est solution de (E)

Or g est définie sur $\mathbb{R}$, et est bornée sur $\mathbb{R}$

donc un voisinage de 0. Donc (f, g) est liée.
On $f_0(0) = g(0) = 1$
Donc $g = f$, on a bien la formule souhaitée.

600 2) On a utilisé le théorème sur les équivalents
163 d'intégrales, qui est l'analogue de celui pour
les séries numériques

• Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge (la limite est en b), alors
lorsque $x \rightarrow b^-$,

$$f \sim g \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$$

• Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors quand $x \rightarrow b^-$,

$$f \sim g \Rightarrow \int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$$