

Lemme de Scheffé et
convergence de lois binomiales
vers une loi de Poisson

- de l'intégration aux probas,
Garet-Knutzmann, p 236

- Prob et stats, Chabard-Ruch, p 59

6K • Lemme de Scheffé: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace
mesuré. Soit $f, (f_n)_{n \geq 1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ des applications
positives intégrables par rapport à μ tel que:

1) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ μ -pp

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$

Alors: $f_n \xrightarrow{L^1} f$, c-à-d $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$

Dém: On pose $g_n = f_n + f - |f_n - f|$

On $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| = f_n + f$

Donc $g_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

Alors d'après le lemme de Fatou:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu$$

$$\begin{aligned} \text{Or: } \int_{\Omega} g_n d\mu &= \int_{\Omega} f_n + f - |f_n - f| d\mu \\ &= \int_{\Omega} f_n d\mu + \int_{\Omega} f d\mu - \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \end{aligned}$$

Alors comme $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$, on
obtient que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu = 2 \int_{\Omega} f d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu$$

D'autre part:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) + f - \lim_{n \rightarrow \infty} (|f_n - f|)$$

Comme $f_n \rightarrow f$ μ -pp, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 2f$$

On obtient donc:

$$2 \int_{\Omega} f d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \geq 2 \int_{\Omega} f d\mu$$

Alors : $\lim \int_n |f_n - f| d\mu \leq 0$

D'où : $0 \leq \lim \int_n |f_n - f| d\mu \leq \lim \int_n |f_n - f| d\mu \leq 0$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n |f_n - f| d\mu = 0$ $\square$

6k-237

Corollaire : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit x et $(x_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ admettant les densités f et $(f_n)_{n \geq 1}$ par rapport à la mesure μ .

On suppose que $f_n \rightarrow f$ μ -pp.

Alors (x_n) converge en loi vers x .

Dém : Soit g une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$.
Alors :

$$\begin{aligned} |E[g(x_n)] - E[g(x)]| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_{x_n}(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_x(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x) d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) d\mu(x) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x) (f_n(x) - f(x))| d\mu(x) \\ &\leq \|g\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) \end{aligned}$$

Et cette quantité tend bien vers 0 d'après le lemme de Scheffé ($f_n \rightarrow f$ μ -pp et $\int f_n d\mu = \int f d\mu = 1$ donc $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$)
On a donc la convergence en loi.

CHA Corollaire : En appliquant cela pour $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue, on trouve que si chaque

$$IP(X_n \in A) = \sum_{h \in A} IP(X_n = h) = \sum_{h \in A} 1_n(h)$$

X_n a pour densité f_n et X a pour densité f , et que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour presque-tout x , alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

6K 297 Corollaire: Soit X et $(X_n)_{n \geq 1}$ des VA discrètes à valeurs dans un ensemble dénombrable D . On suppose que: $\forall h \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} IP(X_n = h) = IP(X = h)$
Alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

(il suffit de remarquer que X et X_n ont une densité par rapport à la mesure de comptage sur D).

Application: Soit $n \geq 1$. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi $\text{Bin}(n, p_n)$
On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} n p_n = \lambda > 0$
Alors X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

Dém: Il suffit donc de montrer que pour tout $h \in \mathbb{N}$: $IP(X_n = h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^h}{h!}$

$$\text{On: } IP(X_n = h) = \binom{n}{h} p_n^h (1-p_n)^{n-h}$$

$$= \binom{n}{h} p_n^h (1-p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^h}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a les équivalents:

$$\bullet \binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{h!} \sim \frac{n^h}{h!}$$

$$\bullet p_n^h \sim \left(\frac{\lambda}{n}\right)^h = \frac{\lambda^h}{n^h}$$

$$\bullet \frac{1}{(1-p_n)^h} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\begin{aligned}
 (1-p_n)^n &= \exp(n \ln(1-p_n)) \\
 &= \exp(n(-p_n + o(p_n))) \\
 &= \exp(-np_n + o(np_n)) \\
 &\sim e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

En multipliant les équivalents, on obtient le résultat souhaité.

Remarques:

Ø 2) Soit $(m_n)_n$ une suite réelle

Alors: $\underline{\lim} (-m_n) = -\overline{\lim} (m_n)$

car $\underline{\lim} m_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} m_k$

Or: $\inf \{-m_k; k \geq n\} = -\sup \{m_k; k \geq n\}$

Donc:

$$\underline{\lim} (-m_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(-\sup_{k \geq n} m_k \right) = -\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} m_k = -\overline{\lim} m_n$$

CHA 2) Prop Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ suite de VA à valeurs dans $\mathbb{N}$ et
 59 X VA à valeurs dans $\mathbb{N}$, Alors $X_n \xrightarrow{\text{law}} X$ si
 $\forall h \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = h) = P(X = h)$

Dém: $\Rightarrow$: Soit $X_n \rightarrow X$. Soit $h \in \mathbb{N}$ (car X est à valeurs entières, $h - \frac{1}{2}$ et $h + \frac{1}{2}$ sont des points de continuité de F_X , donc:

$$\begin{aligned}
 P(X_n = h) &= F_{X_n} \left(h + \frac{1}{2} \right) - F_{X_n} \left(h - \frac{1}{2} \right) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X \left(h + \frac{1}{2} \right) - F_X \left(h - \frac{1}{2} \right) = P(X = h)
 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: cela est déjà montré avec le lemme de Scheffé,
mais on peut le montrer à la main.

Soit x un point de continuité de F_X . Alors:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= \sum_{k=0}^{L(x)} P(X_n = k) \end{aligned}$$

Comme cette somme est finie, on peut faire
tendre n vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) &= \sum_{k=0}^{L(x)} P(X = k) = P(X \leq L(x)) \\ &= P(X \leq x) = F_X(x) \end{aligned}$$

Donc $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

3) En fait le cas $\text{Bin}(n, p_n) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ est un cas
particulier de la loi des événements rares:

390

Soit $(N_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers $+\infty$.

On suppose que $\forall n$, les $A_{n,1}, \dots, A_{n,N_n}$ sont des
événements indépendants avec $P(A_{n,h}) = p_{n,h}$.

On suppose:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{N_n} p_{n,h} = \lambda > 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\max_{1 \leq h \leq N_n} p_{n,h}) = 0$

Soit $S_n = \sum_{h=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,h}}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

Dém rapide. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{h=1}^{N_n} \varphi_{\mathbb{1}_{A_{n,h}}}(t) \quad \text{par indépendance}$$

$$= \prod_{h=1}^{N_n} (p_{n,h} e^{it} + 1 - p_{n,h})$$

$$= \prod_{h=1}^{N_n} (1 + p_{n,h}(e^{it} - 1))$$

$$\text{Also: } \ln(\Phi_n(t)) = \sum_{h=1}^{M_n} \ln(1 + p_{n,h}(e^{t\lambda} - 1))$$

$$= \underbrace{\sum_{h=1}^{M_n} p_{n,h}(e^{t\lambda} - 1)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e^{t\lambda} - 1) \lambda} + \underbrace{\sum_{h=1}^{M_n} o(p_{n,h})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Q. compare $p_{n,h}$ to exponential:

$$\Phi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(e^{t\lambda} - 1)} = \Phi_\lambda(t) \quad \text{with } \lambda \sim \mathcal{N}(\lambda)$$