

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : FORMULE DES COMPLÉMENTS

TONY LIMAGNE

RÉSUMÉ. Les équations fonctionnelles jouent un grand rôle en analyse, surtout dans les problèmes de prolongement de fonctions. La formule des compléments en est un exemple typique car elle illustre à merveille le principe de contagion en analyse complexe. La stratégie est simple. On montre d'abord la formule sur une certaine partie de la droite réelle en utilisant le théorème des résidus, mais aussi – et c'est l'avantage d'être sur la droite réelle ! – d'utiliser les théorèmes de changement de variables et de Fubini ; ensuite, on conclut en invoquant le théorème de prolongement analytique pour rendre la formule valable sur une certaine partie du plan complexe.

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 236, 245, 244, 235 et 239.

1. PRÉLIMINAIRES

On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On peut prolonger la fonction Γ sur demi-plan $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ en posant

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Via une intégration par parties, on obtient l'équation fonctionnelle suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

qui généralise la fonction factorielle. Le théorème d'holomorphicité sous le signe intégrale assure alors que Γ est holomorphe sur Ω_0 . Enfin on définit la fonction $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Cette fonction est 2π -périodique, holomorphe sur $\mathbb{C}$ (comme somme de série entière) et s'annule aux points $k\pi$ pour k parcourant $\mathbb{Z}$.

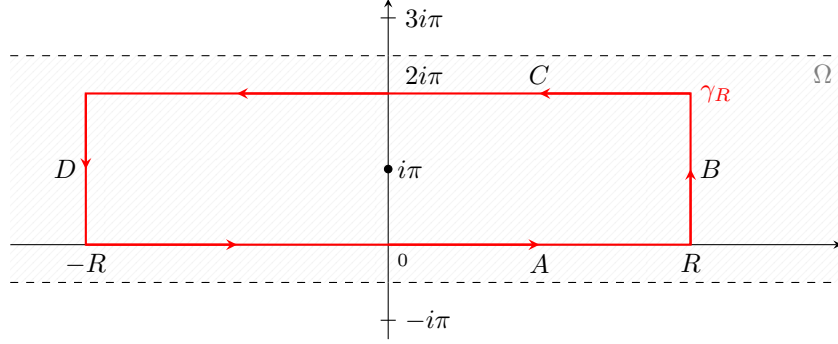
2. DÉVELOPPEMENT

Théorème 1 (Formule des compléments). Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in]0, 1[$ on a

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et calculons

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t} dt.$$

FIGURE 1. Représentation de l'ouvert convexe Ω et du contour γ_R

La fonction

$$f : z \mapsto \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z},$$

est holomorphe sur l'ouvert $\Omega \setminus \{i\pi\}$ avec un pôle simple en $i\pi$ de résidu $-e^{i\pi\alpha}$ car

$$(z - i\pi)f(z) = e^{\alpha z} \frac{1}{\frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi}} \xrightarrow{z \rightarrow i\pi} -e^{i\pi\alpha}.$$

Soit $R > 0$. Par le théorème des résidus on a

$$-2i\pi e^{i\pi\alpha} = \int_{\gamma_R} f = I_A(R) + I_B(R) + I_C(R) + I_D(R).$$

On a déjà

$$I_A(R) = \int_{-R}^R f(t) dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I_\alpha,$$

et

$$I_C(R) = - \int_{-R}^R f(t + 2i\pi) dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -e^{2i\pi\alpha} I_\alpha.$$

On paramètre le segment B par le chemin

$$[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto R + it,$$

pour avoir

$$I_B(R) = i \int_0^{2\pi} f(R + it) dt.$$

On paramètre le segment D par le chemin

$$[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto -R + i(2\pi - t),$$

pour avoir

$$I_D(R) = -i \int_0^{2\pi} f(-R + i(2\pi - t)) dt.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$|f(R + 2i\pi t)| \leq \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} e^{(\alpha-1)R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$$

et

$$|f(-R + 2i\pi(1-t))| \leq \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\alpha R} \underset{R \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème de convergence dominée on a alors

$$I_B(R), I_D(R) \underset{R \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi on a à la limite

$$-2i\pi e^{i\alpha\pi} = (1 - e^{2i\pi\alpha})I_\alpha,$$

c'est-à-dire

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Ensuite par le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s} \right)^\alpha e^{-(s+t)} \right) \frac{dt}{t} ds.$$

On pose

$$u = s + t \in]0, +\infty[\quad \text{et} \quad v = \frac{t}{s} \in]0, +\infty[.$$

Le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme

$$]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[^2, (u, v) \mapsto \left(t = \frac{uv}{1+v}, s = \frac{u}{1+v} \right),$$

a pour jacobien $-\frac{u}{(1+v)^2} = -\frac{t}{v(1+v)}$. Par le théorème de changement de variables on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \iint_{]0, +\infty[^2} v^{\alpha-1} \frac{1}{1+v} e^{-u} du dv, \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{1+v} dv \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} du \right), \\ &\underset{(v=et)}{=} I_\alpha \cdot 1 = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \end{aligned}$$

Or on sait que les fonctions Γ et $z \mapsto \frac{1}{\sin(\pi z)}$ sont holomorphes sur l'ouvert convexe

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \in]0, 1[\}.$$

La formule précédente permet alors de conclure par le principe du prolongement analytique que

$$\forall z \in \Omega, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

□

Référence : [SS, Chap. 6, §1.6, Theorem 1.4 et Lemma 1.5].

Remarque 2. Le terme "complément" provient du fait que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $0 < \Re(z) < 1$ alors $1-z$ vérifie aussi $0 < \Re(1-z) < 1$. (Le complexe $1-z$ est le "complément" de z .)

Application 3. On a l'égalité

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(t)) dt = \ln(\sqrt{2\pi}).$$

Démonstration. La formule des compléments donne pour tout $t \in]0, 1[$

$$\ln(\Gamma(t)) + \ln(\Gamma(1-t)) = \ln(\pi) - \ln(\sin(\pi t)).$$

On a donc

$$2 \int_0^1 \ln(\Gamma(t)) dt = \ln(\pi) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(\sin(t)) dt, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))) dt, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt, \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Référence : [CLF, Chap. XVI, Exercice 16-6].

3. UNE APPLICATION CLASSIQUE : LE DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN DU SINUS CARDINAL

Proposition 4. Pour tout $z \in \Omega_0$ on a la formule de Weiestrass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

où γ est la constante d'Euler.

Démonstration. Soit $x > 0$. Par le théorème de convergence dominée on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt}_{=I_n(x)}.$$

Par des intégrations par parties successives on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n(x) = \left(x n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right)^{-1}.$$

Et puisque $\Gamma(x) > 0$ alors on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

En notant $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ on décompose $n^{-x} = e^{-x \ln(n)} = e^{-x H_n} e^{-x(H_n - \ln(n))}$ pour avoir

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{-x(H_n - \ln(n))} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}.$$

Ensuite on sait que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ si bien que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{-x\gamma} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}.$$

Cette égalité se prolonge sur Ω_0 par le théorème du prolongement analytique (car les expressions de gauche et de droite définissent des fonctions holomorphes sur Ω_0). $\square$

Corollaire 5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in]0, 1[$. Par la formule des compléments et l'équation fonctionnelle de Γ on a

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z^2\Gamma(z)\Gamma(-z)}.$$

Ensuite on utilise la formule de Weierstrass :

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \times e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

L'expression de droite définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (par le théorème de Weierstrass sur les suites de fonctions holomorphes). De même la fonction $z \mapsto \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (comme somme d'une série entière) de sorte que l'égalité précédente se généralise sur $\mathbb{C}$ par le principe du prolongement analytique. $\square$

Référence : [QQ, Chap. VII, §4, Exemple fondamental 4.2].

4. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) Justifier que les intégrales I_α et $\int_0^1 \ln(\Gamma(t))dt$ sont bien définies.
- (2)
- (3)

RÉFÉRENCES

- [SS] E. Stein et R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.
 [CLF] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Analyse* 2, Masson, 1995.
 [QQ] H. Queffélec et M. Queffélec, *Analyse complexe et applications*, Calvage & Mounet, 2017.