

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : THÉORÈME DES EXTREMA-LIÉS

TONY LIMAGNE

RÉSUMÉ. On sait qu'une fonction numérique continue sur un compact admet un minimum et un maximum mais la théorie des espaces compacts nous fournit seulement l'existence de tels points. En pratique, les méthodes numériques donnent de bonnes approximations des extrema sous certaines conditions de régularité. Cependant, la mise en oeuvre de ces algorithmes s'avère fastidieuse, surtout sans ordinateur... On se propose ici d'établir un théorème qui théoriquement est capable de nous fournir les points extremaux : c'est le théorème des extrema-liés. Sa preuve mêle calcul différentiel et algèbre linéaire élémentaire avec en fer de lance le théorème d'inversion locale.

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 148, 159, 214, 215 et 206. En ce qui concerne la leçon 214 où la notion d'espace tangent peut être présentée, les preuves de la proposition 3 et du théorème 4 peuvent être écourtées. Dans ce cas, il est préférable de présenter conjointement une preuve du lemme 1 et une des applications 6 ou 7.

1. PRÉLIMINAIRES

Le théorème des extrema-liés est basé sur deux lemmes de dualité en dimension finie. Les notations sont celles de [G, Chap. 3, §4]. On fixe E un K -espace vectoriel de dimension finie $d \geq 1$. On fixe également $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq d$.

Lemme 1. Si $\psi, \phi_1, \dots, \phi_n$ sont des formes linéaires sur E vérifiant

$$\bigcap_{i=1}^n \ker(\phi_i) \subseteq \ker(\psi),$$

alors ψ est une combinaison linéaire des applications $\phi_1, \dots, \phi_n$.

Démonstration. Par un jeu de réécriture on a

$$\begin{aligned} \ker(\phi_1) \cap \dots \cap \ker(\phi_n) &\subseteq \ker(\psi), \\ \phi_1^\circ \cap \dots \cap \phi_n^\circ &\subseteq \{\psi\}^\circ, \\ \{\phi_1, \dots, \phi_n\}^\circ &\subseteq \{\psi\}^\circ, \\ \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)^\circ &\subseteq \{\psi\}^\circ, \end{aligned}$$

On peut alors renverser les inclusions en passant à l'orthogonal dans $E^\vee$:

$$\begin{aligned} (\{\psi\}^\circ)^\perp &\subseteq (\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)^\circ)^\perp, \\ \{\psi\} &\subseteq \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_n), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Référence : [A, Annexe B, §3, Lemme B.17].

Lemme 2. Soient $\phi_1, \dots, \phi_n$ des formes linéaires sur E . La famille $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre dans $E^\vee$ si et seulement si l'application $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : E \rightarrow K^n, x \mapsto (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$ est surjective.

Démonstration. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n .

$\Rightarrow$ Déterminons $\text{Im}(\phi)^\perp$. Soit $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $f \in \text{Im}(\phi)^\perp$ écrit $f = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Pour tout $x \in E$ on a

$$0 = f(\phi(x)) = \lambda_1 e_1^*(\phi(x)) + \dots + \lambda_n e_n^*(\phi(x)).$$

Or on a aussi $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) = \phi_1(x)e_1 + \dots + \phi_n(x)e_n$ et donc pour tout $x \in E$

$$\lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_n \phi_n(x) = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_n \phi_n = 0$. Et puisque $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

$\Leftarrow$ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que $\lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_n \phi_n = 0$. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par surjectivité de ϕ il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) = e_i$ c'est-à-dire $\phi_j(x) = 0$ pour tout $j \neq i$ et $\phi_i(x) = 1$. On a alors

$$0 = \lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_n \phi_n(x) = \lambda_i.$$

On en déduit que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre. $\square$

Référence : [G, Chap. 3, §4, Exercice 1].

2. DÉVELOPPEMENT

On fixe un entier $d \geq 1$. On note $(\mathbb{R}^d)^\vee$ l'espace dual de $\mathbb{R}^d$. Lorsque $l \in \llbracket 1, d \rrbracket$ on note $\mathbb{R}^l \subseteq \mathbb{R}^d$ l'injection canonique

$$\mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^d, (x_1, \dots, x_l) \mapsto (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_l),$$

avec la convention $\mathbb{R}^0 = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$. On fixe U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f, g_1, \dots, g_n$ des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . On note

$$M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0\}.$$

On suppose dans la suite que M est non vide. Lorsque $x \in M$ on dit qu'un vecteur v de $\mathbb{R}^d$ est *tangent en x* s'il existe $\delta > 0$ et $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow M$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. On note alors T_x l'ensemble des vecteurs tangents en x .¹

Proposition 3. Soit $a \in M$. Si les formes linéaires $d_a g_1, \dots, d_a g_n$ sont linéairement indépendantes alors :

- (1) Il existe un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local $\Phi : V \rightarrow W$ qui envoie a sur 0 et tel que $\Phi(V \cap M) = W \times \mathbb{R}^{d-n}$.
- (2) L'ensemble T_a est un sev de $\mathbb{R}^d$ (donc en particulier non vide) et vérifie

$$d_a \Phi(T_a) = \mathbb{R}^{d-n}.$$

Démonstration. (1) On complète la famille libre $(d_a g_1, \dots, d_a g_n)$ en une base $\mathcal{B} = (d_a g_1, \dots, d_a g_n, u_{n+1}, \dots, u_d)$ de $(\mathbb{R}^d)^\vee$. Pour tout $i \in \llbracket n+1, d \rrbracket$, posons $g_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto u_i(x - a)$. L'application

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto (g_1(x), \dots, g_d(x)),$$

1. À ce stade rien ne dit que T_x soit non vide.

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et sa différentielle en a

$$d_a g = (d_a g_1, \dots, d_a g_n, u_{n+1}, \dots, u_d) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

est bijective. En effet, si $h \in \mathbb{R}^d$ vérifie $d_a g(h) = 0$ alors

$$\forall f \in (\mathbb{R}^d)^\vee, \quad f(h) = 0,$$

puisque $\mathcal{B}$ est une base de $(\mathbb{R}^d)^\vee$ et donc $h = 0$ (prendre par exemple $f = (\cdot, h)$).

Par le théorème d'inversion locale il existe donc un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local $\Phi : V \rightarrow W$ qui envoie a sur $g(a) = 0$ donné par $\Phi = g|_V$. En particulier on a $\Phi(V \cap M) = W \cap \mathbb{R}^{d-n}$.

(2) Comme $d_a \Phi$ est bijective il suffit de montrer que

$$d_a \Phi(T_a) = \mathbb{R}^{d-n}.$$

$\boxed{\supseteq}$ Soient $w \in \mathbb{R}^{d-n}$, $\delta > 0$ et $\eta :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^{d-n}, t \mapsto tw$. Quitte à réduire δ , on suppose

$$\eta(]-\delta, \delta[) \subseteq W \cap \mathbb{R}^{d-n} = \Phi(V \cap M).$$

L'application $\gamma = \Phi^{-1} \circ \eta :]-\delta, \delta[\rightarrow V \cap M$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\gamma'(0) = (d_0 \Phi^{-1})(\eta'(0)) = (d_a \Phi)^{-1}(w) \in T_a,$$

et donc $w \in d_a \Phi(T_a)$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $v \in T_a$ et soit $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow M$ un chemin tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire δ , on suppose $\gamma(]-\delta, \delta[) \subseteq V \cap M$. L'application $\Phi \circ \gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow W \cap \mathbb{R}^{d-n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$d_a \Phi(v) = (\Phi \circ \gamma)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(\gamma(t))}{t} \in \overline{\mathbb{R}^{d-n}} = \mathbb{R}^{d-n},$$

ce qui conclut. $\square$

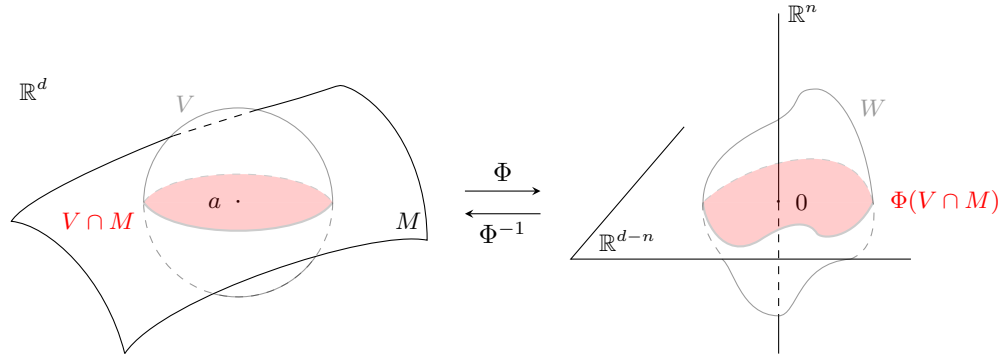


FIGURE 1. Schéma heuristique de la preuve.

Théorème 4 (des extrema-liés). Soit $a \in M$. On suppose les formes linéaires $d_a g_1, \dots, d_a g_n$ linéairement indépendantes. Si f admet un extremum local en a alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$(1) \quad d_a f = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_n d_a g_n.$$

Démonstration. On reprend les notations de la proposition 3. Vu le lemme 1, il suffit de montrer que

$$\bigcap_{i=1}^n \ker(d_a g_i) \underset{(1)}{=} T_a \underset{(2)}{\subseteq} \ker(d_a f).$$

Preuve de (1). Comme $\Phi = g|_V$ et $d_a \Phi(T_a) = \mathbb{R}^{d-n}$ on a

$$T_a \subseteq \bigcap_{i=1}^n \ker(d_a g_i).$$

Par ailleurs, la famille $(d_a g_1, \dots, d_a g_n)$ étant libre le lemme 2 garantit que l'application linéaire $h \mapsto (d_a g_1, \dots, d_a g_n) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ est surjective si bien que le théorème du rang donne

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^n \ker(d_a g_i) \right) = d - n = \dim(\mathbb{R}^{d-n}) = \dim(d_a \Phi(T_a)) = \dim(T_a),$$

d'où l'égalité (1).

Preuve de (2). Soient $v \in T_a$ et $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow M$ un chemin tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. L'application

$$f|_M \circ \gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en 0 (car f admet un extremum local en a). On a donc

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = d_a f(v),$$

d'où l'inclusion (2), ce qui conclut. $\square$

Référence : [BG, Chap. 2, §2.51, Théorème 2.5.7].

Remarque 5. Lorsque $n = d$ l'énoncé du théorème 4 est trivial.

3. QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME DES EXTREMA-LIÉS

L'application suivante est très difficile à obtenir sans le théorème des extrema-liés.

Application 6. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Les valeurs propres d'une matrice symétrique de $M_d(\mathbb{R})$ sont toutes réelles.

Démonstration. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$, et $\|\cdot\|$ sa norme associée. On considère $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'application linéaire ayant A pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Comme A est symétrique, l'endomorphisme u est autoadjoint. On note

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|^2 = 1\},$$

et on considère la fonction $f : x \mapsto (u(x), x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$. L'application $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|^2 - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $M = g^{-1}(\{0\})$. On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad d_x g : h \mapsto 2(x, h).$$

De la même manière on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad d_x f : h \mapsto 2(u(x), h).$$

En effet, fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (u(x) + u(h), x+h), \\ &= (u(x), x) + (u(x), h) + (u(h), x) + (u(h), h), \\ &= f(x) + 2(u(x), h) + f(h). \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du caractère autoadjoint de u ainsi que de la symétrie du produit scalaire. Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de u il existe $c > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \quad |f(h)| \leq c\|h\|^2,$$

et donc $f(h) = o(\|h\|)$. Ainsi on a $d_x f : h \mapsto 2(u(x), h)$. Comme M est compact et que f est continue sur M alors f admet un maximum sur M en un point $a \in M$ (en particulier $a \neq 0$). Appliquons le théorème des extrema-liés : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} d_a f &= \lambda d_a g, \\ (u(a), \cdot) &= (\lambda a, \cdot), \\ u(a) &= \lambda a, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Référence : [BMP, Chap. 1, §1.3, Application 1.50].

L'application suivante est classique mais peut se redémontrer avec des outils plus élémentaires (voir [P, Partie 2, Chap. 12, §12.1.4.2])).

Application 7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour tout d -uplet de nombres positifs $(x_1, \dots, x_d)$ on a l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[d]{x_1 \cdots x_d} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_d}{d}.$$

Démonstration. Un vecteur général $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^d$ sera noté $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. On note $U =]0, +\infty[^d$ et

$$M = \{\mathbf{x} \in U : x_1 + \cdots + x_d = 1\}.$$

On considère les fonctions continues $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_d \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) = x_1 + \cdots + x_d - 1.$$

L'ensemble $M = g^{-1}(\{0\})$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^d$ de sorte que f atteint bien un maximum sur M en un certain point $\mathbf{a} \in M$. Par le théorème des extrema-liés il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}),$$

c'est-à-dire

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \prod_{j \neq i} a_j = \lambda,$$

ou encore

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad f(\mathbf{a}) = \lambda a_i.$$

Or on a aussi $\mathbf{a} \in M$ et donc

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lambda = \lambda(a_1 + \cdots + a_d) = d \cdot f(\mathbf{a}) = \lambda a_i.$$

Et puisque $\lambda \neq 0$ on a

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_d = \frac{1}{d}.$$

Soit $\mathbf{x} \in U$. On pose $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{x_1 + \cdots + x_d}$ de sorte que $\mathbf{y} \in M$ et

$$\frac{x_1 \cdots x_d}{(x_1 + \cdots + x_d)^d} = f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{a}) = \frac{1}{d^d},$$

d'où le résultat. $\square$

Référence : [G, Chap. 5, §2, Exercice 4.a)].

Exercice 8. Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto xy$ sur $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

4. MÉTHODE NUMÉRIQUE : LA MINIMISATION SOUS CONTRAINTES

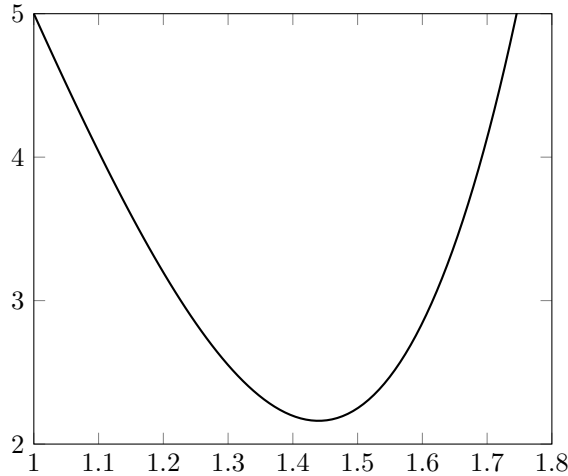
L'équation (1) peut s'écrire en terme de vecteurs gradient

$$(2) \quad \nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \cdots + \lambda_n \nabla g_n(a) \quad \text{et} \quad g_1(a) = \cdots = g_n(a) = 0.$$

Si les fonctions f et $g_1, \dots, g_n$ sont assez régulières, on peut résoudre le système (2) de $(d+n)$ équations d'inconnues (a, λ) où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ par la méthode de Newton appliquée à la fonction suivante (appelée parfois *fonction de Lagrange*) :

$$F(x, \mu) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \sum_{k=1}^n \mu_k \nabla g_k(x) \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}.$$

Par exemple, on cherche à minimiser la fonction $J(x) = 2x_1^2 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^2$ sous la contrainte $x_1 + 2x_3 - 3 = 0$. Ce problème se ramène à déterminer le point $\bar{x}_2$ qui minimise la fonction $x_2 \mapsto J(3 - 2x_2, x_2)$ et au calcul de $x_1 = 3 - 2\bar{x}_2$. Graphiquement on peut conjecturer la valeur de $\bar{x}_2$:



Lorsqu'on applique la méthode précédente on récupère non seulement une bonne approximation du minimum recherché mais aussi la valeur du multiplicateur de Lagrange. Voici une retranscription verbatim de la méthode en Python :

```

import numpy as np

# Fonction de Lagrange
def F(X):
    f0 = 4*X[0] + 4*X[0]*X[1]**2 + 1*X[2]
    f1 = 2*X[1] + 4*X[1]*X[0]**2 + 2*X[2]
    f2 = X[0] + 2*X[1] - 3
    return [f0, f1, f2]

# Jacobienne de F
def DF(X):
    return np.array([
        [4+4*X[1]**2, 8*X[0]*X[1], 1],
        [8*X[0]*X[1], 2+4*X[0]**2, 2],
        [1, 2, 0]
    ])

# Méthode de Newton appliquée à F
epsilon = 10**(-5) ; X = np.array([1, 1, 1])

while np.linalg.norm(F(X)) >= epsilon:
    X = np.linalg.solve(DF(X), DF(X)@X-F(X))

print("Minimum sous contrainte en :", (X[0], X[1]))
print("Multiplicateur de Lagrange :", -X[2])

```

Le Shell renvoie les valeurs suivantes :

```

In [64]: (executing cell "Minimisation sous..." (line 81 of "Optimisation.py"))
Minimum sous contrainte en : (0.12053790929937463, 1.4397310453503125)
Multiplicateur de Lagrange : 1.4815678569473565

```

5. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

Voici un application empruntée à la physique statistique.

Application 9. Soit un système de N particules, ayant accès à des états physiques $A_1, \dots, A_q$ d'énergies respectives $\epsilon_1, \dots, \epsilon_q$. À l'équilibre thermodynamique, le nombre n_i de particules dans l'état A_i est asymptotiquement

$$n_i \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{N}{\sum_{k=1}^q e^{-\epsilon_k/(k_B T)}} e^{-\epsilon_i/(k_B T)},$$

où T est la température du système (à l'équilibre) et k_B est la constante de Boltzmann.

Démonstration. Une réalisation du système est un q -uplet $w = (n_1, \dots, n_q)$. La probabilité que le système soit dans une réalisation donnée w est

$$C(w) = \frac{N!}{n_1! \cdots n_q!}.$$

On souhaite trouver la réalisation $\bar{w} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_q)$ qui maximise $C(w)$, ou de façon plus pratique, qui maximise la fonction

$$f(w) = \ln(C(w)).$$

Le système obéit à deux contraintes :

- (1) les particules sont discernables :

$$N = n_1 + \dots + n_q. \quad (C1)$$

- (2) le système est isolé ; autrement dit l'énergie totale E du système est constante :

$$E = n_1 \epsilon_1 + \dots + n_q \epsilon_q. \quad (C2)$$

En pratique n est très grand (de l'ordre de 10^{24}) de sorte que les variables aléatoires $n_1, \dots, n_q$ sont assez régulières (de classe $\mathcal{C}^1$). On introduit la fonction de Lagrange associée à f :

$$F(w) = f(w) - \alpha N - \beta E,$$

où α et β sont des multiplicateurs de Lagrange. Pour pouvoir dériver F , on considère un prolongement dérivable de la factorielle, à savoir la fonction Γ . On a donc

$$dF = \sum_{k=1}^q \left(-\frac{\partial \ln(\Gamma)}{\partial n_k} (n_k + 1) - \alpha - \beta \epsilon_k \right) dn_k.$$

Cette formule s'annule sous les contraintes :

$$\frac{\partial \ln(\Gamma)}{\partial n_k} (n_k + 1) - \alpha - \beta \epsilon_k = 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, q.$$

Ensuite la formule

$$\frac{d \ln(\Gamma)}{dX} (X + 1) = \ln(X) + O\left(\frac{1}{X}\right).$$

permet d'avoir

$$\ln(\bar{n}_k) = -\alpha - \beta \epsilon_k + O\left(\frac{1}{\bar{n}_k}\right) \quad \text{ie} \quad \bar{n}_k \sim e^{-\alpha - \beta \epsilon_k}.$$

En injectant cette approximation dans la contrainte (C1), on obtient

$$\alpha = -\ln(N) + \ln\left(\sum_{k=1}^q e^{-\beta \epsilon_k}\right).$$

D'où l'on déduit

$$\bar{n}_k \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N}{\sum_{k=1}^q e^{-\beta \epsilon_k}} e^{-\beta \epsilon_k} \quad (\star)$$

Dans le cas où le système est un gaz parfait monoatomique, l'énergie ϵ_k est réduit à la seule énergie cinétique d'une particule à l'état A_k . On a donc

$$E = \frac{3}{2} N T k_B.$$

En injectant l'approximation $(\star)$ dans la contrainte (C2), on trouve $\beta = \frac{1}{k_B T}$. La stricte convexité de F confirme que $\bar{w}$ est un maximum. En résumé, l'équation $(\star)$ donne la réalisation la plus probable pour le système : c'est la *distribution de Maxwell-Boltzmann classique*. $\square$

Référence : [A, Annexe B, §B.3e].

6. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR
RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) Justifier les phrases du type "Quitte à réduire δ , on suppose que..." présentes dans la preuve de la proposition 3.(2). Quelles sont les hypothèses minimales utilisées ?

RÉFÉRENCES

- [A] W. Appel, *Mathématiques pour la physique (et les physiciens)*, 5^e édition, H&K, 2017².
[BG] M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 5^e édition, Puf, 2012.
[P] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.
[G] X. Gourdon, *Analyse*, 3^e édition, Ellipses, 2020.
[BMP] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré, *Objectif agrégation*, 2^e édition, H&K, 2005.

2. Attention ! Ce livre ne fait pas partie de la bibliothèque officielle du jury.