

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : EXISTENCE D'UNE FONCTION CONTINUE DONT LA SÉRIE DE FOURIER DIVERGE

TONY LIMAGNE

RÉSUMÉ. Il est très naturel d'essayer de retrouver une fonction à partir de ses coefficients de Fourier. On dispose par exemple du théorème de Jordan-Dirichlet, qui affirme qu'une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est somme de sa série de Fourier. Paul du Bois-Reymond a prouvé en 1873 que ce n'était plus vrai si l'on suppose seulement la fonction continue. Précisément, il a donné un exemple explicite de fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0. Cet exemple a beaucoup surpris ses contemporains.

On peut se demander si l'exemple de du Bois-Reymond est pathologique, au sens de savoir si la plupart des fonctions continues ont leur série de Fourier convergente. On peut donner un sens précis – à l'aide du théorème de Baire – à l'expression "beaucoup de fonctions", et on montre le résultat suivant : la plupart des fonctions continues ont leur série de Fourier qui diverge en 0.

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 205, 246, 208 et 234.

1. PRÉLIMINAIRES

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues et 2π -périodiques. Cet espace est muni d'une norme naturelle, définie par

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Lorsque $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Pour $n \geq 0$, on posera également

$$S_n(f) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, t \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt} \quad \text{et} \quad D_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, t \mapsto \sum_{j=-k}^k e^{ikt}.$$

Lorsque X est un espace métrique, on appelle G_{δ} -ensemble toute intersection (en allemand "Durchschnitt") dénombrable d'ouverts (en allemand "Gebiet") de X . Parallèlement, on appelle F_{σ} -ensemble toute réunion (σ pour "Somme") de fermés (F pour "Fermé") de X . Cette terminologie a pour but de préciser les énoncés utilisant le

lemme 1 (Baire). Dans un espace métrique complet X , l'intersection de toute famille dénombrable de parties ouvertes denses dans X est encore dense dans X (et donc en particulier non vide). Autrement dit, l'union d'une famille dénombrable de parties fermées d'intérieur vides est encore d'intérieur vide.

Démonstration. Soient $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'ouverts denses dans X et $\Omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$. Soit U un ouvert non vide de X . Montrons que $\Omega \cap U$ est non vide.

On sait que Ω_1 est dense dans X : il existe donc $a_1 \in \Omega_1 \cap U$. Et puisque Ω_1 est ouvert l'ensemble $\Omega_1 \cap U$ est ouvert si bien qu'il existe $r_1 > 0$ tel que $B(a_1, r_1] \subseteq \Omega_1 \cap U$. Quitte à réduire le rayon, on peut supposer $r_1 < 1$.

On sait que Ω_2 est dense dans X : il existe donc $a_1 \in \Omega_2 \cap B(a_1, r_1[$. Et puisque Ω_2 est ouvert l'ensemble $\Omega_2 \cap B(a_1, r_1[$ est ouvert si bien qu'il existe $r_2 > 0$ tel que $B(a_2, r_2] \subseteq \Omega_2 \cap B(a_1, r_1[$. Quitte à réduire le rayon, on peut supposer $r_2 < \frac{1}{2}$.

On construit ainsi par récurrence deux suites (a_n) et (r_n) vérifiant

$$0 < r_n < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B(a_1, r_1] \subseteq \Omega_1 \cap U \\ \forall n \geq 2, \quad B(a_n, r_n] \subseteq \Omega_n \cap B(a_{n-1}, r_{n-1}[. \end{cases}$$

Soient $n, m, N \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq N$ et $m \geq N$. Les points a_n et a_m sont tous deux dans $B(a_N, r_N]$ de sorte que $d(a_n, a_m) < 2r_N = \frac{2}{N}$. La suite (a_n) est donc de Cauchy. Comme X est complet, la suite (a_n) converge vers un point $a \in X$. En particulier pour tout $n \geq 2$ le point a est dans l'ensemble fermé $B(a_n, r_n]$ et donc $a \in \Omega_n$ sans oublier que $a \in B(a_1, r_1] \subseteq \Omega_1 \cap U$. Finalement a appartient à $\Omega \cap U$. $\square$

Référence : [R, Chap. 5, Théorème 5.6].

2. DÉVELOPPEMENT

Théorème 2 (Banach-Steinhaus). Soient E un espace de Banach, F un evn et $H \subseteq L_c(E, F)$. On a l'alternative suivante :

- (1) Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $u \in H$, $\|u\| \leq M$.
- (2) L'ensemble

$$\left\{ x \in E : \sup_{u \in H} \|u(x)\| = +\infty \right\},$$

est une G_δ -ensemble dense de E (et donc en particulier non vide).

Référence : [R, Chap. 5, Théorème 5.8].

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\Omega_n = \{x \in E : \exists u \in H, \|u(x)\| > n\} = \bigcup_{u \in H} (\|\cdot\| \circ u)^{-1}(]n, +\infty[),$$

est une partie ouverte de E . On distingue deux cas :

- (1) Soit il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que Ω_N n'est pas dense dans E . Il existe donc $r > 0$ et $a \in E$ tel que $B(a, r] \cap \Omega_N = \emptyset$. Soient $u \in H$ et $x \in B(0, 1]$. On a $a + rx \in B(a, r]$ et donc $a + rx \notin \Omega_N$ c'est-à-dire $\|u(a + rx)\| = \|u(a) + ru(x)\| \leq N$. Ainsi on a

$$\forall x \in B(0, 1], \quad \|u(x)\| \leq \frac{1}{r}(N + \|u(a)\|) \leq \frac{2N}{r},$$

et donc $\|u\| \leq 2N/r$.

- (2) Soit chaque Ω_n est dense dans E . Et puisque E est un espace de Banach, le lemme de Baire garantit que

$$\Omega = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \Omega_n = \left\{ x \in E : \sup_{u \in H} \|u(x)\| = +\infty \right\},$$

est un G_δ -ensemble dense de E . $\square$

Référence : [R, Annexe A, Exercice 7].

Corollaire 3. L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en 0 est un G_δ -ensemble dense de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration. On note $E = (\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. On considère la forme linéaire

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^n c_n(f).$$

On note D_n le n^e noyau de Dirichlet. Pour tout $f \in E$ on a

$$|u_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \right) = \|D_n\|_1 \|f\|_\infty,$$

ce qui montre que u_n est continue avec $\|u_n\| \leq \|D_n\|_1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_k = \frac{D_n}{|D_n| + \frac{1}{k}}.$$

La suite $(f_k D_n)_k$ est une suite croissante de fonctions positives qui converge simplement vers $|D_n|$ sur $[-\pi, \pi]$. Par le théorème de Beppo-Levi on a donc

$$|u_n(f_k)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|D_n\|_1,$$

ce qui montre que $\|u_n\| = \|D_n\|_1$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} \|D_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t} dt, \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

En résumé, on sait que :

- (1) E est un espace de Banach ;
- (2) $H = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L_c(E, \mathbb{C})$;
- (3) $\sup_{u \in H} \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_1 = +\infty$;

si bien que par le théorème 2 l'ensemble

$$\{f \in E : \sup_{u \in H} \|u\| = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |S_n(f)(0)| = +\infty\},$$

est G_δ -ensemble dense dans E (et donc en particulier non vide). $\square$

Référence : [G, Annexe A, Exercice 8].

Remarques 4. (1) La démonstration proposée ici est non constructive. Un exemple explicite de fonction continue et 2π -périodique dont la somme de la série de Fourier diverge en 0 est proposé dans [G, Chap. 4, §5.5, Exercice 4].

(2) On vient de démontrer l'implication

$$f \in \mathcal{C}_{2\pi} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \in \mathcal{C}_{2\pi}.$$

est fausse (ici e_n est la fonction $t \mapsto e^{int}$). La condition nécessaire peut toutefois s'obtenir en renforçant les hypothèses sur f (par exemple en supposant $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ce qui garantit la convergence normale de la série de Fourier de f).

3. ET SANS LE THÉORÈME DE BEPPO-LEVI ?

Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'idée c'est de partir d'une approximation du signe de D_n dont on peut contrôler l'écart en moyenne avec $|D_n|$. Soient $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ un paramètre. On sait que D_n s'annule aux points

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1},$$

pour $k \in \mathbb{Z}$, et on sait que $[\theta_{-k-1}, \theta_{k+1}]$ contient $[-\pi, \pi]$. On impose dans un premier temps

$$\delta < \frac{1}{2}(\theta_{k+1} - \theta_k) = \frac{\pi}{2n+1},$$

afin de considérer la fonction g suivante

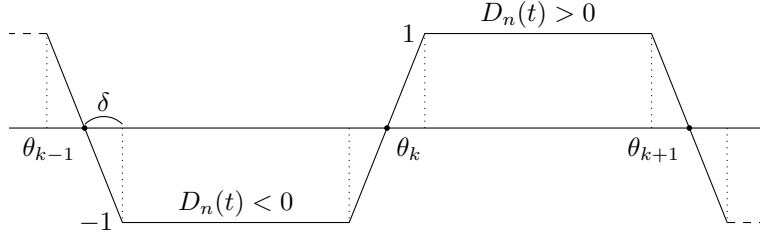


FIGURE 1. Graphe de la fonction g .

Pour $t \in [-\pi, \pi]$ on a $D_n(t) \leq g(t)D_n(t) + (1 - g(t))D_n(t)$. Comme $g(t)D_n(t) \geq 0$ alors $|D_n(t)| \leq g(t)D_n(t) + |1 - g(t)||D_n(t)|$. On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \leq u_n(g) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n-1}^{n+1} \int_{\theta_k - \delta}^{\theta_k + \delta} |D_n(t)| dt.$$

Et puisque $|D_n| \leq 2n+1$ alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \leq u_n(g) + \frac{\delta}{\pi} (2n+1)^2.$$

En choisissant $\delta < \epsilon \frac{\pi}{(2n+1)^2}$ on garantit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \leq u_n(g) + \epsilon.$$

Finalement, on a $\|u_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$. CQFD

Référence : [T, Chap. III, §6.3].

4. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

(1) Montrer que pour tout $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Quel sens donner à cette formule lorsque $t = 0$?

(2) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente.

- (3) Montrer qu'il n'existe pas $f \in E$ de norme $\|f\|_\infty \leq 1$ tel que $\|u_n\| = |u_n(f)|$.
- (4) Montrer que pour tout $f \in E$, on a aussi $|u_n(f)| \leq (2n + 1)\|f\|_\infty$.

RÉFÉRENCES

- [G] X. Gourdon, *Analyse*, 3^e édition, Ellipses, 2020.
- [R] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3^e édition, Dunod, 2020.
- [T] C. Tisseron, *Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels*, Méthodes, Hermann, 1985¹.

1. Attention ! Ce livre ne fait pas partie de la bibliothèque officielle du jury.