

# PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : LEMME DE LA GRENOUILLE

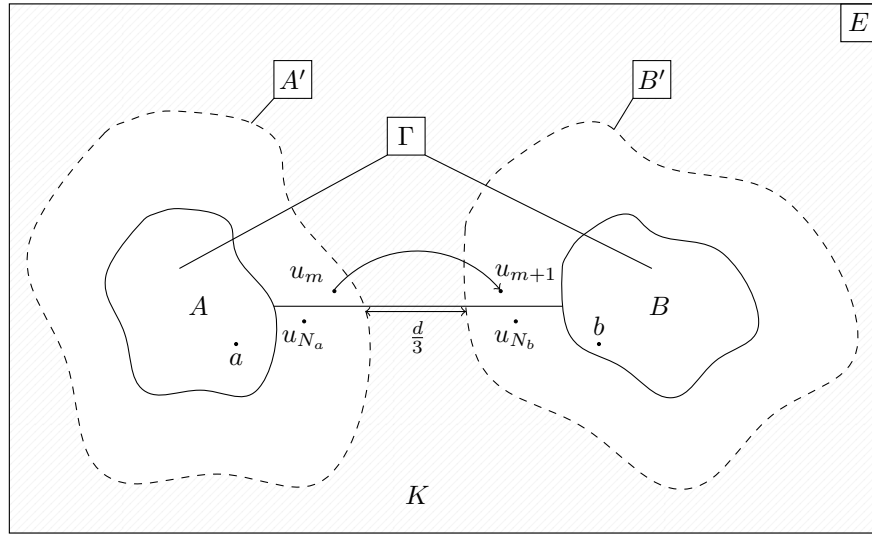
TONY LIMAGNE

**RÉSUMÉ.** On se propose ici d'établir une généralisation du lemme des prisonniers appelée le lemme de la grenouille. Ces appellations imagées sont en partie basées sur le fait que ces résultats sont des énoncés de connexité. La connexité formalise la notion intuitive d'espace en "un seul morceau". Nous allons motiver cette image (ou plus précisément son contraire) en démontrant le lemme de la grenouille. La compacité et les valeurs d'adhérence jouent ici un rôle important ici. En guise d'application, nous proposons d'établir un critère de convergence pour les suites récurrence définies sur un compact.

Le développement est adapté pour les leçons 204, 203, 223 et 226.

## 1. DÉVELOPPEMENT

La figure ci-dessous illustre la démarche entreprise dans la preuve du lemme de la grenouille. Il s'agit d'un compagnon indispensable, à compléter au fur à mesure du développement (un huitième du tableau doit lui être consacré).



**Proposition 1** (Lemme de la grenouille). Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact. Si  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $E$  telle que

$$d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

alors l'ensemble  $\Gamma$  des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est connexe.

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $\Gamma$  soit non connexe. Il existe donc deux fermés disjoints non vides  $A$  et  $B$  de  $E$  tels que

$$\Gamma = A \cup B.$$

Comme  $E$  est compact alors  $A$  et  $B$  sont compacts, et puisque  $A \cap B = \emptyset$  alors

$$d = d(A, B) > 0.$$

Les ensembles

$$A' = \left\{ x \in E : d(x, A) < \frac{d}{3} \right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{ x \in E : d(x, B) < \frac{d}{3} \right\}.$$

sont deux ouverts de  $E$  de sorte que

$$K = E \setminus (A' \cup B'),$$

est une partie fermée (donc compacte) de  $E$ . Comme la suite  $(d(u_{n+1}, u_n))$  converge vers 0, choisissons  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad d(u_{n+1}, u_n) < \frac{d}{3}. \quad (\star)$$

Fixons  $(a, b) \in A \times B$  et posons

$$V_a = \left\{ n \geq N : d(u_n, a) < \frac{d}{3} \right\} \quad \text{et} \quad V_b = \left\{ n \geq N : d(u_n, b) < \frac{d}{3} \right\},$$

Comme  $a$  et  $b$  sont deux valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  les ensembles  $V_a$  et  $V_b$  sont infinis. Soit  $N_a \in V_a$ . Il existe alors  $N_b \in V_b$  tel que  $N_a < N_b$ . Si pour tout  $p \in \llbracket N_a, N_b \rrbracket$  on aurait

$$u_p \notin K,$$

alors il existerait  $m \in \llbracket N_a, N_b - 1 \rrbracket$  tel que  $u_m \in A'$  et  $u_{m+1} \in B'$  (c'est le saut de la grenouille!). On aurait alors

$$d(u_{m+1}, u_m) \geq d(u_{m+1}, A) - d(u_m, A) \geq \frac{2d}{3} - \frac{d}{3} = \frac{d}{3},$$

ce qui contredit  $(\star)$ . Il existe donc  $\phi(0) \in \llbracket N_a, N_b \rrbracket$  tel que  $u_{\phi(0)} \in K$ . Ensuite, puisque  $V_a$  est infini on peut prendre  $N_a > \phi(0)$  et trouver  $\phi(1) \geq N_a > \phi(0)$  tel que  $u_{\phi(1)} \in K$ . Ainsi on construit par récurrence une suite extraite  $(u_{\phi(n)})$  à valeurs dans  $K$ . Par compacité de  $K$ , cette suite possède une valeur d'adhérence  $\ell \in K$  qui est aussi une valeur d'adhérence de  $(u_n)$  si bien que  $\ell \in \Gamma \cap K$ . Absurde.  $\square$

Référence : [G, Chap. 5, §4.4, Exercice 7].

**Exercice 2.** Soient  $(u_n)$  une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est soit vide soit un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Application 3.** Si  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est continue alors la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 \in [0, 1] \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

converge si et seulement si  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers 0.

*Démonstration.* Le sens direct est clair. Par l'absurde, supposons que  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers 0 mais que  $(u_n)$  ne converge pas. Comme  $[0, 1]$  est compact, il existe deux valeurs d'adhérence  $\ell$  et  $\ell'$  de  $(u_n)$  telles que  $\ell < \ell'$ . Notons  $\Gamma$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$ . Soit  $a \in \Gamma$ , limite d'une sous-suite  $(u_{\phi(n)})$ . Comme

$$u_{\phi(n)+1} - u_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et que  $f$  est continue en  $a$  on a

$$(1) \quad a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{\phi(n)}) = f(a),$$

Les éléments de  $\Gamma$  sont donc des points fixes de  $f$ . Par la proposition 1, on sait que  $\Gamma$  est une partie connexe de  $\mathbb{R}$  donc un intervalle de  $\mathbb{R}$  si bien que  $[\ell, \ell'] \subseteq \Gamma$ . En particulier  $\frac{\ell' + \ell}{2}$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . Et puisque  $\ell < \ell'$  il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que

$$\left| u_p - \frac{\ell' + \ell}{2} \right| \leq \frac{\ell' - \ell}{2},$$

c'est-à-dire  $u_p \in [\ell, \ell']$ . Ainsi  $u_p$  est un élément de  $\Gamma$ , donc un point fixe de  $f : (u_n)$  est donc stationnaire (à partir du rang  $p$ ), donc convergente. Absurde.  $\square$

Référence : [FGN, Chap. 2, Exercice 2.37].

## 2. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) Démontrer que les parties connexes de  $\mathbb{R}$  sont exactement les intervalles.
- (2) Soient  $(E, d)$  un espace métrique,  $A$  une partie compacte de  $E$  et  $B$  une partie fermée de  $E$ . Montrer que si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $d(A, B) > 0$ .
- (3) Soient  $(E, d)$  un espace métrique et  $A \subseteq E$  non vide. Fixons  $r > 0$ . Montrer que  $V_r(A) = \{x \in E : d(x, A) < r\}$  est une partie ouverte de  $E$ .
- (4) Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles. Montrer que si deux des quatre suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(u_n + v_n)$  et  $(u_n - v_n)$  convergent alors les quatre suites convergent.
- (5) Démontrer le lemme des prisonniers sans passer par le lemme de la grenouille.

## RÉFÉRENCES

- [G] X. Gourdon, *Analyse*, 3<sup>e</sup> édition, Ellipses, 2020.  
 [FGN] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS*, Vol. 3, Cassini, 2020.