

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : DÉCOMPOSITION POLAIRE SUR $GL_n(\mathbb{R})$

TONY LIMAGNE

RÉSUMÉ. La décomposition d'une matrice suit la stratégie du "diviser pour mieux régner". Usuellement on connaît deux familles importantes de matrices : les matrices symétriques auxquelles est rattaché le théorème spectral, et les matrices orthogonales qui préserve la norme. Le théorème de décomposition polaire affirme que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme produit d'une matrice symétrique positive et d'une matrice orthogonale. Dans le cas des matrices inversibles, on possède même mieux – c'est le sujet du présent développement – et ce cas particulier suffit amplement pour s'attaquer à des problèmes sérieux de topologie algébrique comme l'exponentielle de matrices, les sous-groupes compacts du groupe orthogonal,...

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 153, 154, 157 et 203.

1. PRÉLIMINAIRES

Fixons un entier $n \geq 1$. La transposée d'une matrice A sera notée tA . Une matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* lorsque ${}^tS = S$. On note $S_n(\mathbb{R})$ des matrices *symétriques* de $M_n(\mathbb{R})$. Parmi les matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ deux sous-ensembles sont démarquables :

- (1) l'ensemble $S_n^+(\mathbb{R})$ des matrices *symétriques positives* de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^txSx \geq 0.$$

- (2) l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ des matrices *symétriques définies positives* de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^txSx > 0.$$

On rappelle le

Théorème 1 (spectral). Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors les valeurs propres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A sont réels et il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tP \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$.

Les valeurs propres d'une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ sont positives. Réciproquement si une matrice S de $S_n(\mathbb{R})$ a toutes ses valeurs propres positives alors S est dans $S_n^+(\mathbb{R})$. Les valeurs propres d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont strictement positives. Réciproquement si une matrice S de $S_n(\mathbb{R})$ a toutes ses valeurs propres strictement positives alors S est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. DÉVELOPPEMENT

Étant donnée une matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on appelle *décomposition polaire* de A , si elle existe, tout couple $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

Théorème 2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Plus précisément, l'application

$$\rho : \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS,$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Le fait que ρ soit continue résulte de la continuité du produit matriciel. Fixons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a ${}^tAA \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même ${}^tAA \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puisque A est inversible. Par le théorème spectral il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tAA = {}^tP \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P,$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. On pose

$$S = {}^tP \cdot \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P,$$

qui vérifie $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S^2 = {}^tAA$. On pose ensuite $O = AS^{-1}$ qui est bien dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ car ${}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S = I_n$. Le couple (O, S) est donc une décomposition polaire de A : ρ est surjective.

Soit (O', S') une autre décomposition polaire de A . On a

$$S^2 = {}^tAA = {}^t(O'S')(O'S') = S'^2.$$

Notons $f \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $f(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i . On a

$$S = f({}^tP \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P) = f(S^2) = f(S'^2).$$

La matrice S est donc un polynôme en S' : S et S' commutent. Comme de plus S et S' sont diagonalisables (théorème spectral) alors S et S' sont codiagonalisables. Autrement dit, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$S = Q^{-1} \cdot \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot Q \quad \text{et} \quad S' = Q^{-1} \cdot \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot Q,$$

avec $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$. L'égalité $S^2 = S'^2$ entraîne pour tout i , $\lambda_i = \mu_i^2$ et donc $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ si bien que $S = S'$ (et donc aussi $O = O'$) : ρ est injective.

À ce stade, on vient de montrer que A admet une unique décomposition polaire qui est (O, S) . Il reste à montrer que l'application ρ^{-1} qui à une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa décomposition polaire est continue. Soit (A_p) une suite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A et (O_p, S_p) la décomposition polaire de A_p . On veut montrer que

$$O_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} O \quad \text{et} \quad S_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} S.$$

Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, la suite (O_p) admet une valeur d'adhérence $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, limite d'une sous-suite $(O_{\phi(p)})$. Comme $S_p = A_p {}^tO_p$ et que $M \mapsto {}^tM$ est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la suite $(S_{\phi(p)})$ converge vers $\Sigma = A {}^t\Omega$ qui est dans $\overline{\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On peut vérifier assez facilement que $\overline{\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subseteq \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus une matrice inversible de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (une telle matrice n'admet pas 0 pour valeur propre). On a donc $\Sigma \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Le couple (Ω, Σ) est donc une décomposition polaire de A . Le couple (Ω, Σ) est donc la décomposition polaire de A , d'où $O = \Omega$ et $S = \Sigma$. En particulier, la suite (O_p) admet O pour unique valeur d'adhérence. Donc (O_p) converge vers O , ce qui oblige la suite (S_p) à converger vers S . $\square$

Référence : [CG, Chap. VI, §1, Théorème 1.1.3].

Exercice 3. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $O \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. *Indication* : utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

3. LIEN AVEC L'EXPONENTIELLE DE MATRICES

Cette section peut-constituée à elle seule un développement (adapté aux leçons 155, 157 et 153). On commence par établir deux résultats de théorie spectrale.

Lemme 4. On note $\|\cdot\|_2$ la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute matrice symétrique $M \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|M\|_2 = \max_{\mu \in \text{Sp}(M)} |\mu|,$$

où $\text{Sp}(M)$ désigne le spectre de M .

Démonstration. Appliquons le théorème spectral : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = {}^tP \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot P,$$

Comme tP et P sont orthogonales on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|Mx\| &= \|{}^tP \cdot ((\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot P)x)\| = \|\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot Px\|, \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2 (Px)[i]^2} \leq \max_{\mu \in \text{Sp}(M)} |\mu| \|x\|. \end{aligned}$$

L'inégalité réciproque se vérifie facilement en considérant un vecteur propre pour la valeur propre de plus grande valeur absolue, ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 5. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Notons $\mu_1, \dots, \mu_r$ les valeurs propres de $\exp(M)$ (qui sont nécessairement strictement positives). Si $f \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $f(\mu_i) = \ln(\mu_i)$ pour tout i , alors $M = f(\exp(M))$.

Démonstration. Comme M est diagonalisable il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $M = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$, et donc

$$\begin{aligned} \exp(M) &= P \cdot \exp(\text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))) \cdot P^{-1}, \\ f(\exp(M)) &= P \cdot \exp(\text{diag}(f(\exp(\lambda_1)), \dots, f(\exp(\lambda_n)))) \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Or les éléments $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)$ sont des valeurs propres de $\exp(M)$. Par le choix de f on a donc $f(\exp(M)) = M$, ce qui conclut. $\square$

Théorème 6. L'application $\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ se restreint en un homéomorphisme

$$S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $M = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$ et donc

$$\exp(M) = P \cdot \exp(\text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))) \cdot P^{-1},$$

ce qui montre que $\exp(M)$ symétrique et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives ; en d'autres termes $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. L'application

$$\exp_S : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}),$$

est donc bien définie. L'application $\exp_S$ est surjective. En effet si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$ tels que $M = P \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot P^{-1}$. En

posant $\lambda_i = \ln(\mu_i)$ pour tout i on obtient $M = \exp(P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1})$, ce qui justifie la surjectivité de $\exp_S$. L'application $\exp_S$ est injective. En effet soient $M, M' \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(M) = \exp(M')$. Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme interpolateur vérifiant $f(\nu) = \ln(\nu)$ pour tout valeur propre ν de $\exp(M) = \exp(M')$. D'après le lemme 5 on a $M = Q(\exp(M)) = Q(\exp(M')) = M'$, ce qui justifie l'injectivité de $\exp_S$. On a donc montré que $\exp_S$ est une bijection continue (par continuité de $\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$). Il reste à montrer que $\exp_S^{-1}$ est continue. Pour cela, on considère (A_p) une suite de $S_n(\mathbb{R})$ telle que $(\exp(A_p))$ converge vers $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par bijectivité de $\exp_S$ il existe une (unique) matrice symétrique A telle que $B = \exp(A)$. On doit montrer que la suite (A_p) converge vers A ; pour cela il suffit de montrer que (A_p) est bornée et admet A pour seule valeur d'adhérence. Cette dernière propriété est évidente : toute matrice A' de $S_n(\mathbb{R})$ qui est une valeur d'adhérence de (A_p) doit vérifier $\exp(A') = B$ par continuité de $\exp_S$, et donc $A' = A$ par bijectivité de $\exp_S$.

Pour terminer la preuve on montre donc que la suite (A_p) est bornée. Comme $(\exp(A_p))$ converge, elle est bornée et par le lemme 4 il existe $m > 0$ tel que chaque valeur propre μ de chaque $\exp(A_p)$ vérifie $\mu \leq m$. Et puisque $\exp(\nu)$ est une valeur propre de $\exp(A_p)$ lorsque ν est une valeur propre de A_p on en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \nu \in \text{Sp}(A_p), \quad \nu \leq \ln(m).$$

D'autre part, la suite $(\exp(A_p)^{-1} = \exp(-A_p))$ converge aussi. Et puisque $\exp(-\nu)$ est une valeur propre de $\exp(A_p)$ lorsque ν est une valeur propre de A_p , pour les mêmes raisons que précédemment il existe $m' > 0$ tels que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \nu \in \text{Sp}(A_p), \quad \nu \geq -\ln(m').$$

En résumé, les valeurs propres de chaque A_p sont contenues dans le segment $[-\ln(m'), \ln(m)]$, ce qui justifie que (A_p) est bornée (d'après le lemme 4). $\square$

Corollaire 7. Il existe un homéomorphisme

$$GL_n(\mathbb{R}) \sim O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

où $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ est vu comme un espace métrique pour n'importe quel choix de norme.

Démonstration. Par théorème 2 on sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème 6 on sait que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $S_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel normé de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, il est homéomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Finalement, $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. $\square$

Moralement, le corollaire 7 signifie que toute la topologie de $GL_n(\mathbb{R})$ se "concentre" dans $O_n(\mathbb{R})$. En particulier, $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ possède le même nombre de composantes connexes, à savoir 2.

Référence : [CG, Chap. VI, §2, Proposition 2.5.1 et Corollaire 2.5.2].

Exercice 8. On note $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif. Montrer que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $SO_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. QUELQUES APPLICATIONS EN TOPOLOGIE ALGÈBRE

Application 9. Le seul sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soient G un tel sous-groupe et $g \in G$. Écrivons

$$g = os,$$

la décomposition polaire de g . Comme G contient $O_n(\mathbb{R})$ alors $s = {}^t o g \in G$ et donc

$$\{s^k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq G.$$

Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de s . Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre λ^k est une valeur propre de s^k . Si la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ alors $(s^k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ce qui contredit la compacité de G . Si la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 alors la suite $(\lambda^{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$: on retourne au premier cas. On en déduit que $\lambda = 1$ et donc $s = I_n$. $\square$

Référence : [CG, Chap. VI, §1, Corollaire 1.2.3].

Application 10. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme

$$\|A\| = \sup_{|x|_2=1} |Ax|_2,$$

où $|\cdot|_2$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée associée à $\|\cdot\|$.

Démonstration. On note $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ et Ξ la boule unité de $\|\cdot\|$. L'ensemble Ξ est convexe et contient $O_n(\mathbb{R})$ puisque $|Ox|_2 = |x|_2$ pour tout $O \in O_n(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$. On a donc $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R})) \subseteq \Xi$. Par l'absurde, supposons $B \not\subseteq \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ et soit $M \in \Xi$ tel que

$$M \notin \text{Conv}(O_n(\mathbb{R})).$$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, l'ensemble $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est aussi une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$ par le théorème de Carathéodory. D'après le théorème de Hahn-Banach (2^e forme géométrique) on peut séparer au sens strict les ensembles $\{M\}$ et $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$. Autrement dit il existe $\epsilon > 0$ et un hyperplan affine $[f = \alpha]$ de $M_n(\mathbb{R})$ tels que $f(M) \geq \alpha + \epsilon$ et $f(A) \leq \alpha - \epsilon$ pour tout $A \in \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$. En particulier on a

$$\sup\{f(A) : A \in \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))\} < f(M).$$

Or on peut dire trois choses :

- (1) Par le théorème de Riesz, il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $f(X) = \text{tr}(AX)$ pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$.
- (2) Par la décomposition polaire sur $M_n(\mathbb{R})$ il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $A = \Omega\Sigma$.
- (3) Par le théorème spectral, il existe une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Sigma(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

Ces trois arguments mis bout-à-bouts justifient les lignes suivantes :

$$f(M) = \text{tr}(M\Omega\Sigma) = \sum_{i=1}^n (M\Omega\Sigma)e_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n (\Omega\Sigma)e_i \cdot ({}^t M e_i) \leq \sum_{i=1}^n |\Omega\Sigma e_i|_2 |{}^t M e_i|_2.$$

Et puisque $\|M\| = \|^t M\| = 1$ alors on a

$$f(M) \leq \sum_{i=1}^n |\Sigma e_i|_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(\Sigma) = \text{tr}(A^t \Omega) = f(^t \Omega).$$

Absurde. □

Référence : [BMP, Chap.3, §3.1.2, Application 3.16].

Exercice 11. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme

$$\|A\| = \sup_{|x|_2=1} |Ax|_2,$$

où $|\cdot|_2$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $\|A\| = \sqrt{\rho(^t A A)}$ où ρ est le rayon spectral donné par

$$\rho(M) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \in \text{Sp}(M)\}.$$

Exercice 12. On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M, N) \mapsto \text{tr}(N^t M)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ dont on note $A = OS$ la décomposition polaire. Montrer que

$$d(A, O_n(\mathbb{R})) = \inf_{\Omega \in O_n(\mathbb{R})} \|A - \Omega\| = \|A - O\|.$$

5. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) L'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est-il ouvert de $M_n(\mathbb{R})$? de $GL_n(\mathbb{R})$? de $S_n(\mathbb{R})$?
- (2) Montrer que $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$.
- (3) Justifier que l'application $S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}), S \mapsto S^2$ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme. En déduire que ρ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme.
- (4) Montrer que le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

RÉFÉRENCES

- [CG] Ph. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, Vol. 1, Calvage & Mounet, 2017.
- [FGN] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS: Algèbre 3*, Cassini, 2010.
- [BMP] V. Beck, J. Malick et G. Peyré, *Objectif agrégation*, 2^e édition, H&K, 2005.