

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : ENGENDREMENT DES GROUPES $GL_n(K)$ ET $SL_n(K)$

TONY LIMAGNE

RÉSUMÉ. On sait que la méthode du pivot de Gauss permet concrètement de transformer un système linéaire en un autre système triangulaire, ayant les mêmes solutions, et donc facile à résoudre. Les opérations autorisées pour effectuer cette transformation s'obtiennent en considérant deux types de matrices élémentaires : les transvections et les dilatations. On peut s'attendre à ce que ces dernières jouent un rôle dans la structure des groupes linéaires. C'est le cas puisqu'elles forment des familles génératrices de ces groupes. Ce qui est plus étonnant, c'est qu'on peut utiliser ce résultat d'algèbre pour démontrer des énoncés de nature topologique comme par exemple la connexité de certains groupes linéaires.

Ce développement est adapté pour les leçons 108, 154, 204 et 106 (pour lesquelles la preuve de la section 2.1 est présentable). Dans le cas de la leçon 162, on préférera présenter la preuve de la section 2.2.

1. PRÉLIMINAIRES

Fixons K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $M_n(K)$. Si $\lambda \in K^*$, la matrice

$$D(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{nn},$$

est appelée la *matrice de dilatation* de rapport λ . L'inverse de cette matrice est encore une matrice de dilatation (celle de rapport λ^{-1}). Lorsque $n \geq 2$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, la matrice

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij},$$

est appelée une *matrice de transvection*. Lorsque $n = 1$ on convient que (1) est l'unique matrice de transvection de $SL_1(K)$. L'inverse de cette matrice est encore une matrice de transvection (c'est $T_{ij}(-\lambda)$). Soit $A \in M_n(K)$. En notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes, on rappelle que :

- (1) $T_{ij}(\lambda)A$ s'obtient en remplaçant L_i par $L_i + \lambda L_j$ dans A .
- (2) $AT_{ji}(\lambda)$ s'obtient en remplaçant C_i par $C_i + \lambda C_j$ dans A .
- (3) $AD(\lambda)$ s'obtient en remplaçant C_n par λC_n dans A .

2. DÉVELOPPEMENT

Nous allons démontrer de deux manières différentes le

- Théorème 1.** (1) Le groupe $SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection de $M_n(K)$.
- (2) Le groupe $GL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation de $M_n(K)$.

2.1. Une preuve sans l'algorithme du pivot de Gauss. On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est trivial : $\text{SL}_n(K) = \{(1)\}$. Fixons $n \geq 2$ et supposons que $\text{SL}_{n-1}(K)$ est engendré par les transvections de $\text{M}_{n-1}(K)$. Fixons $A \in \text{SL}_n(K)$. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. Comme A est inversible la colonne C_1 est non nulle. Il existe donc $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $A[j, 1] \neq 0$. Si jamais $A[1, 1] = 0$ l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_j$ garantit que $(T_{1j}(1)A)[1, 1] \neq 0$: on peut donc supposer $A[1, 1] \neq 0$ (et même $A[2, 1] \neq 0$ quitte à effectuer $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$). On effectue successivement :

- (1) l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-A[1,1]}{A[2,1]}L_2 = L_1 + \lambda L_2$ qui amène à

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & A'_1 & \\ \star & & & \end{pmatrix} = T_{12}(\lambda)A = A_1.$$

- (2) pour $i = 2, \dots, n$ les opérations $L_i \leftarrow L_i - A_1[i, 1]L_1 = L_i + \lambda_i L_1$ qui amènent à

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = T_{n1}(\lambda_n) \cdots T_{21}(\lambda_2)A_1 = A_2.$$

- (3) pour $j = 2, \dots, n$ les opérations $C_j \leftarrow C_j - A_2[1, j]C_1 = C_j + \mu_j C_1$ qui amènent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = A_2 T_{12}(\mu_2) \cdots T_{1n}(\mu_n) = A_3.$$

On a donc

$$A_3 = T_{n1}(\lambda_n) \cdots T_{21}(\lambda_2) T_{12}(\lambda) A T_{12}(\mu_2) \cdots T_{1n}(\mu_n),$$

Et puisque A est dans $\text{SL}_n(K)$ alors $A'_3 \in \text{SL}_{n-1}(K)$. Par hypothèse de récurrence il existe donc des transvections $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_r$ de $\text{M}_{n-1}(K)$ telles que $A'_3 = \overline{T}_1 \cdots \overline{T}_r$. En posant

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{T}_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

on forme des matrices de transvection de $\text{M}_n(K)$ qui vérifient

$$A_3 = T_1 \cdots T_r,$$

et donc A est un produit de matrices de transvection de $\text{M}_n(K)$ (l'inverse d'une matrice de transvection étant encore une matrice de transvection), ce qui clôt la récurrence.

(2) Faisons $B = (b_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(K)$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} & \frac{b_{1,n}}{\det(B)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n-1} & \frac{b_{n,n}}{\det(B)} \end{pmatrix} = BD \left(\frac{1}{\det(B)} \right),$$

est dans $\mathrm{SL}_n(K)$. Il existe des matrices de transvection $T_1, \dots, T_r$ de $M_n(K)$ telles que

$$A = T_1 \cdots T_r,$$

et donc $B = AD\left(\frac{1}{\det(B)}\right)^{-1} = T_1 \cdots T_r D(\det(B))$, ce qui achève la preuve.

Référence : [FGN, Chap. 5, Exercice 5.1].

2.2. Une preuve avec l'algorithme du pivot de Gauss. Lorsqu'on applique l'algorithme du pivot de Gauss à une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, le choix d'un pivot nécessite souvent de permuter deux lignes de A . Cette opération s'effectue via les matrices de la forme

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} \boxed{I_{i-1}} & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \boxed{I_{j-i+1}} & & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \boxed{I_{n-j+1}} \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, ces matrices ne sont pas produit de transvections (leur déterminant vaut -1). Pour espérer prouver le théorème 1 en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, il faut donc construire des matrices remarquables qui s'écrivent comme produit de transvections et dont les actions sur les lignes de A sont analogues à celles exercées par les matrices P_{ij} .

Lemme 2. Soit $A \in M_n(K)$. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(1) La matrice

$$P_i = \begin{pmatrix} \boxed{I_{i-1}} & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \boxed{I_{n-i-1}} \end{pmatrix},$$

est un produit de transvections. De plus, la matrice $P_i A$ s'obtient en remplaçant L_i par L_{i+1} et L_{i+1} par $-L_i$.

(2) Soit $\lambda \in K^*$. La matrice

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{I_{i-1}} & & & \\ & \lambda & & \\ & & \boxed{I_{n-i+1}} & \\ & & & \lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

est un produit de transvections. De plus, la matrice $D_i(\lambda)A$ s'obtient en remplaçant L_i par λL_i et L_n par $\lambda^{-1} L_n$.

Démonstration. En ce qui concerne les actions sur les lignes, il s'agit dans les deux cas de calculs matriciels sans grande difficulté. On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $P_i = T_{i(i+1)}(1)T_{(i+1)i}(-1)T_{i(i+1)}(1)$. D'autre part, on a aussi

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ on a

$$\delta_i = \begin{pmatrix} \boxed{I_{i-1}} & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda^{-1} & \\ & & & \boxed{I_{n-i-1}} \end{pmatrix} = T_{i(i+1)}(\lambda)T_{(i+1)i}(-\lambda^{-1})T_{i(i+1)}(\lambda)P_i.$$

Ensuite on a $D_i(\lambda) = \delta_i \delta_{i+1} \cdots \delta_{n-1}$, ce qui conclut. $\square$

Montrons maintenant le théorème 1. Soit $A \in \text{GL}_n(K)$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss. Comme A est inversible, la première colonne de A est non nulle : il existe k tel que $A[k, 1] \neq 0$. On choisit $a_1 = A[k, 1]$ comme premier pivot. On ramène a_1 en position $(1, 1)$, quitte à remplacer A par la matrice PA où $P = P_1 \cdots P_{k-1}$ (qui est bien un produit de transvection d'après le lemme 2). Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ on effectue les opérations

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{A[i, 1]}{a_1} L_1 = L_i + \lambda_i L_1,$$

pour se ramener à la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = T_{n1}(\lambda_n) \cdots T_{21}(\lambda_2)A.$$

On réitère le procédé précédent sur A'_1 qui est bien dans $\text{GL}_{n-1}(K)$. Au final, il existe des pivots $a_2, \dots, a_n \in K^*$ et une matrice M_L produit de transvections tels que

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & \star & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} = M_L A.$$

Ceci achève l'algorithme du pivot de Gauss. Ensuite on effectue successivement les opérations

$$\begin{aligned} C_j &\leftarrow C_j - A_2[1, j]a_1^{-1}C_1 & \forall j = 2, \dots, n, \\ &\vdots \\ C_j &\leftarrow C_j - A_2[k, j]a_k^{-1}C_k & \forall j = k+1, \dots, n-1, \\ &\vdots \\ C_j &\leftarrow C_j - A_2[n-1, j]a_{n-1}^{-1}C_{n-1} & \forall j = n, \end{aligned}$$

pour se ramener à la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} = M_L A M_C,$$

où M_C est un produit de transvections. Enfin on effectue les opérations

$$L_i \leftarrow a_i^{-1} L_i,$$

pour se ramener à la matrice

$$D(a) = \begin{pmatrix} \boxed{I_{n-1}} & \\ & a \end{pmatrix} = D_{n-1}(a_{n-1}^{-1}) \cdots D_1(a_1^{-1}) M_L A M_C,$$

où on a explicitement $a = a_n a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} \neq 0$. Dans le cas où $A \in SL_n(K)$ on a nécessairement $a = 1$. On conclut ensuite avec le lemme 2 et en remarquant que l'inverse d'une transvection est encore une transvection.

3. SUR LA CONNEXITÉ DE CERTAINS GROUPES LINÉAIRES

Application 3. On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Fixons $A, B \in SL_n(\mathbb{K})$. Écrivons

$$A = T_A(\lambda_1) \cdots T_A(\lambda_r).$$

en produit de transvections de $M_n(\mathbb{K})$. L'application

$$\gamma_A : [0, 1] \rightarrow SL_n(\mathbb{K}), t \mapsto \prod_{i=1}^r T_A(t\lambda_i),$$

est un chemin reliant I_n à A . Notons γ_B le chemin analogue pour B . L'application

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow SL_n(\mathbb{K}), t \mapsto \begin{cases} \gamma_A(1-2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_B(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est un chemin reliant A à B . □

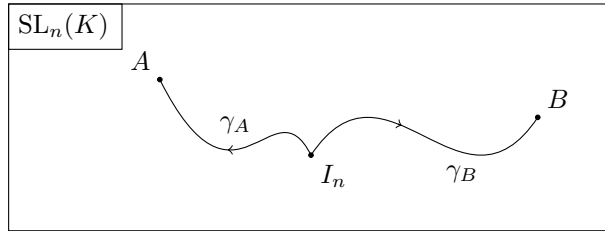


FIGURE 1. Schéma heuristique de la preuve.

La plupart du temps, pour justifier la connexité d'un groupe de matrices, il suffit de relier continûment toutes les matrices de ce groupe à une matrice particulière du même groupe (quitte ensuite à composer les chemins).

Corollaire 4. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Plus précisément, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ possède exactement deux composantes connexes qui sont

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \mid \det(M) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \mid \det(M) < 0\}.$$

Démonstration. D'abord, si $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ était connexe alors par continuité du déterminant l'ensemble $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ serait une partie connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle ce qui n'est pas le cas. Fixons $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Notons $d = \det(M)$. On sait que $A = MD(d^{-1}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et qu'il existe un chemin γ_A reliant A à I_n (puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs). Le chemin

$$\gamma_M : t \mapsto \gamma_A(t)D(d),$$

relie M à $D(d)$.

- (1) Si $d > 0$ alors γ_M relie M à $D(d)$ dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et

$$\gamma^+ : t \mapsto tI_n + (1-t)D(d),$$

est un chemin reliant $D(d)$ à I_n dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Le chemin composé

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}), t \mapsto \begin{cases} \gamma_M(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma^+(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

relie M à I_n : $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est donc connexe (par arcs).

- (2) Si $d < 0$ alors γ_M relie M à $D(d)$ dans $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ et

$$\gamma^- : t \mapsto D((1-t)d - t),$$

est un chemin reliant $D(d)$ à $D(-1) = -I_n$ dans $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$. Le chemin composé

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}), t \mapsto \begin{cases} \gamma_M(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma^-(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

relie M à $-I_n$: $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ est donc connexe (par arcs).

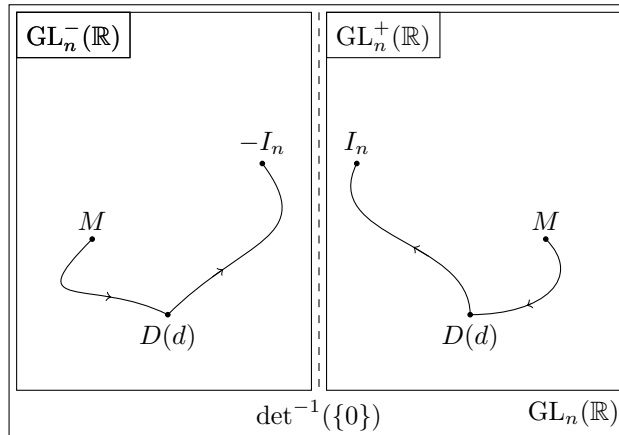


FIGURE 2. Schéma heuristique de la preuve.

□

Référence : [R, Chap. I, §5, Problème 5.1(2) et 5.1(4)].

Moralement $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car, sur la droite réelle, on ne peut pas passer continûment des réels négatifs aux réels positifs sans passer par 0. Dans le plan complexe, on contourne – c'est le mot ! – cette difficulté.

Corollaire 5. Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Notons $d = \det(M)$. On sait que $A = MD(d^{-1}) \in SL_n(\mathbb{C})$ et qu'il existe un chemin γ_A reliant A à I_n (puisque $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs). Le chemin

$$\gamma_M : t \mapsto \gamma_A(t)D(d),$$

relie M à $D(d)$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. Dans le plan complexe, on peut toujours construire un chemin $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ reliant d à 1 qui ne passe pas par 0 (faire un dessin). L'application

$$\gamma_D : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), t \mapsto D(\eta(t)),$$

est donc un chemin reliant $D(d)$ à I_n dans $GL_n(\mathbb{C})$. Le chemin composé

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), t \mapsto \begin{cases} \gamma_A(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_D(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

relie M à I_n : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. □

Référence : [R, Chap. I, §5, Problème 5.1(1)].

4. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) Montrer que deux transvections de $M_n(K)$ sont toujours conjuguées dans $GL_n(K)$, et même dans $SL_n(K)$ lorsque $n \geq 3$.
- (2) Montrer que le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(En particulier le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est de type fini.)

- (3) Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. (*Indication* : utiliser le théorème de réduction des endomorphismes normaux [P, Chap. VI, §5, Remarque 5.2].)

RÉFÉRENCES

- [FGN] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS*, Vol. 2, Cassini, 2021.
[R] J-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.
[P] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.