

## 0.1 Théorème de Bohr-Mollerup

Leçons concernées : 229, 236, (239), 253

### 0.1.1 Prérequis

**Définition 0.1.** On appelle la fonction  $\Gamma$  Gamma d'Euler la fonction qui vérifie  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  où  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ .

**Proposition 0.1.**  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  où  $x > 0$ .

**Proposition 0.2** (Formule de Gauss).  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x)$  où  $\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ . (C)

**Proposition 0.3** (Gaussienne).  $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

**Théorème 0.1** (Inégalité des trois pentes). *Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $f$  est convexe ;
2. pour tous  $x < y < z$  dans  $I$ , on a  $p(x, y) \leq p(x, z) \leq p(y, z)$  ; où  $p(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$
3. pour tout  $a \in I$ , la fonction  $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .

### REMARQUES

**Module (A) pour les leçons 229, 253, (B) pour la leçon 236, (C) pour la leçon 239**

### 0.1.2 Preuve

**Proposition 0.4.**  $\Gamma$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . (A)

*Démonstration.* Posons  $g = \log \circ \Gamma$ . On a  $g'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$ , il s'agit de montrer que  $\Gamma'^2 \leq \Gamma\Gamma''$ . Pour tout  $x > 0$ , d'après l'inégalité de Schwarz on a,

$$\left( \int_0^\infty (t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}) (t^{\frac{x-1}{2}} \log(t) e^{-\frac{t}{2}}) dt \right)^2 \leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty (\log(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt,$$

ce qui est précisément l'inégalité voulue.  $\square$

**Théorème 0.2** (Théorème de Bohr-Mollerup). *Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une solution de l'équation fonctionnelle  $f(x+1) = xf(x)$ , de classe  $C^1$  et log-convexe. Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $f = \lambda\Gamma$ . (A), (B), (C)*

*Démonstration.* La fonction  $g = \ln(f)$  est convexe, donc en notant, pour  $x \neq y$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $p(x, y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$ , on a pour tout réel  $x \in ]0, 1]$  :

$$p(n, n+1) \leq p(n, n+1+x) \leq p(n+1, n+2)$$

(d'après l'inégalité des trois pentes appliqué aux points  $n, n+1, n+1+x$  et  $n+1, n+1+x, n+2$ ), soit :

$$\ln(f(n+1)) - \ln(f(n)) \leq \frac{\ln(f(n+1+x)) - \ln(f(n+1))}{x} \leq \ln(f(n+2)) - \ln(f(n+1)).$$

Tenant compte de  $f(n+1) = nf(n)$ , cette inégalité s'écrit :

$$\ln(n^x) \leq \ln \left( \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \right) \leq \ln((n+1)^x).$$

En écrivant que  $\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} = \frac{(x+n)(x+n-1)\dots x}{n!} \cdot \frac{f(x)}{f(1)}$  (par récurrence sur  $n$ ), on a :

$$\ln(n^x) \leq \ln \left( \frac{(x+n)(x+n-1)\dots x}{n!} \cdot \frac{f(x)}{f(1)} \right) \leq \ln((n+1)^x),$$

ce qui s'écrit aussi, en notant  $\Gamma_n(x) = \frac{n^x}{(x+n)(x+n-1)\dots x}$  :

$$\ln(n^x) \leq \ln \left( \frac{n^x}{\Gamma_n(x)} \frac{f(x)}{f(1)} \right) \leq \ln((n+1)^x).$$

On en déduit :

$$0 \leq \ln \left( \frac{f(x)}{\Gamma_n(x)f(1)} \right) \leq \ln \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^x \right).$$

Avec la croissance de la fonction exponentielle, on peut donc conclure à :

$$\forall x \in ]0, 1], \forall n \geq 1, 1 \leq \frac{f(x)}{\Gamma_n(x)f(1)} \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^x.$$

En faisant tendre  $n$  en l'infini on en déduit que d'après la proposition 3.2 que  $f(x) = f(1)\Gamma(x)$  où  $x \in ]0, 1]$  et  $f(1) > 0$ . On en conclut que  $\frac{f}{\Gamma}$  est 1-périodique d'après la proposition 3.1 et donc cette égalité est vraie pour tout  $x > 0$ .  $\square$

**Proposition 0.5.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \text{ (B)}$$

*Démonstration.*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

En effet car la fonction racine réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur lui même car la fonction est évidemment de classe  $C^1$  et elle est strictement croissante donc on peut appliquer le théorème de changement de variable. ( $u = \sqrt{t}$  et  $2udu = dt$ )  $\square$

**Proposition 0.6** (Formule de duplication de Legendre).

$$2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(x). \text{ où } x > 0 \text{ (A), (B)}$$

*Démonstration.* Considérons la fonction  $f$  qui vérifie que  $f(x) = 2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ .

Montrons que  $f$  vérifie les hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup.

$f$  est de classe  $C^1$  par opérations de telles fonctions.

$$f(x+1) = 2^x \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) = 2^x \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = xf(x).$$

Soit  $g$  une fonction convexe et  $C^2$  et  $a$  une fonction affine alors  $g \circ a$  est convexe. De cette remarque on a que  $f$  est log-convexe.  $f(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \sqrt{\pi}$ .

Donc d'après le théorème de Bohr-Mollerup on a que  $f(x) = \sqrt{\pi} \Gamma(x)$  d'où la formule de duplication de Legendre.  $\square$

**Proposition 0.7** (Intégrale de Raabe).

$$\int_0^1 \ln \Gamma(t) dt = \ln \sqrt{2\pi}.$$

(B)

*Démonstration.* Au voisinage de 0, on a :

$$\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x,$$

avec  $\lim_{0+} \Gamma(x+1) = 1$ . Il en résulte que

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x + \ln \Gamma(x+1),$$

d'où  $\ln \Gamma(x) \sim -\ln x$ . Comme  $x \mapsto -\ln x$  est intégrable sur  $]0, 1]$  (sa primitive  $x \ln x - x$  admet une limite en 0) et positive,  $\ln \circ \Gamma$  l'est aussi.

Soit  $x > 0$ . On part de la formule de duplication :

$$2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(x).$$

Comme tout est strictement positif, on prend le logarithme de chaque membre :

$$(x-1) \ln 2 + \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln \sqrt{\pi} + \ln \Gamma(x),$$

puis on intègre entre 0 et 1 :

$$-\frac{1}{2} \ln 2 + \int_0^1 \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^1 \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) dx = \ln \sqrt{\pi} + \int_0^1 \ln \Gamma(s) ds.$$

Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable  $u = \frac{x}{2}$  et dans la deuxième  $s = \frac{x+1}{2}$  :

$$-\frac{1}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \Gamma(u) du + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \Gamma(s) ds = \ln \sqrt{\pi} + \int_0^1 \ln \Gamma(s) ds,$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 \ln \Gamma(s) ds = \ln \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \ln \sqrt{\pi} = \ln(\sqrt{2\pi}).$$

□