Critère de nilpotence par la trace

- Carnet de voyage en Algébrie, Caldero, p 27
- Algèbre et géométrie, Rombaldi, p 559 et 649

CAL 27 • **Théorème** : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $Tr(A^h) = 0 \quad \forall h \in [\![1; n]\!]$. Alors A est nilpotente.

Dém :

On montre d'abord que A admet une valeur propre nulle

On rappelle que $tr(AB) = tr(BA)$

Car $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = c_{ij}$

et $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = d_{ij}$

Et : $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = tr(BA)$$

Ainsi $tr(PAP^{-1}) = tr(A)$

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A est semblable à une matrice triangulaire T tel que $A = PTP^{-1}$.

Donc $tr(A) = tr(T)$

Alors $tr(A)$ est égal à la somme des valeurs propres de A.

Comme $A^h = PT^hP^{-1}$, alors $Tr(A^h) = Tr(T^h)$

Ainsi $tr(A^h)$ est égal à la somme des puissances h-ièmes des valeurs propres de A.

Soit donc λ_i pour $i \in [\![1; t]\!]$ les valeurs propres distinctes de A, et soit $m_i > 0$ la multiplicité de la valeur propre λ_i.

Alors on a par ce qui précède :

$$Tr(A^h) = \sum_{i=1}^{t} m_i \lambda_i^h$$

Alors d'après les hypothèses, on a que le t-uplet $(m_i)_{0\leq i\leq t}$ est solution du système linéaire :

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^h x_i = 0 \qquad \forall h \in [\![1;n]\!]$$

Comme $t \leq n$, on peut se restreindre au système :

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^h x_i = 0 \qquad \forall h \in [\![1;t]\!]$$

ici on ne sait que la caractéristique est 0 (en cas p, $m_i > 0$ peut être nul)

Or $(m_i)_i$ est une solution non triviale de ce système car $m_i > 0$ $\forall i$.
Ainsi si l'on réécrit le système comme :

$$A.X = \Theta$$

avec $A = \left(\lambda_j^i\right)_{\substack{1\leq i\leq t\\ 1\leq j\leq t}}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix}$ $\quad \Theta = 0_{\mathbb{R}^t}$

alors A n'est pas injective donc $\det(A) = 0$
Or :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_t \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_t^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^t & \lambda_2^t & \cdots & \lambda_t^t \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_t \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \cdots & \lambda_t^{t-1} \end{vmatrix}}_{=V}$$

Alors V est une matrice de Vandermonde.
On montre que :

50 m
55 g

$$\det(V) = W(\lambda_1, \ldots, \lambda_t) = \prod_{1\leq i<j\leq t} (\lambda_j - \lambda_i)$$

On le fait par récurrence sur t :

- pour $t = 1$ et $t = 2$ OK
- ~~On a :~~

$$
\cancel{
\begin{array}{cccccc}
 & C_2 - C_1 & & & C_t - C_1 \\
W(\lambda_1, \dots, \lambda_t) = &
\end{array}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
\lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 & & \lambda_t - \lambda_1 \\
\lambda_1^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & & \lambda_t^2 - \lambda_1^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} - \lambda_1^{t-1} & \cdots & \lambda_t^{t-1} - \lambda_1^{t-1}
\end{vmatrix}
}
$$

- On effectue les opérations suivantes : retrancher à la ligne i la ligne $i-1$ multipliée par λ_1, pour tout $i \in [\![2, t]\!]$ (en commençant par la fin) :

$$
W(\lambda_1, \dots, \lambda_t) = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & \lambda_2 - \lambda_1 & & \lambda_t - \lambda_1 \\
0 & \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 & \cdots & \lambda_t^2 - \lambda_1 \lambda_t \\
\vdots & & & \\
0 & \lambda_2^{t-1} - \lambda_2^{t-2} \lambda_1 & & \lambda_t^{t-1} - \lambda_t^{t-2} \lambda_1
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ L_t - L_{t-1} \end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & 1 & & 1 \\
0 & \lambda_2 - \lambda_1 & & \lambda_t - \lambda_1 \\
0 & \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & & \lambda_t (\lambda_t - \lambda_1) \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \lambda_2^{t-2} (\lambda_2 - \lambda_1) & & \lambda_t^{t-2} (\lambda_t - \lambda_1)
\end{vmatrix}
$$

$$
= \prod_{p=2}^{t} (\lambda_p - \lambda_1) \cdot \begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
\lambda_2 & & \lambda_t \\
 & & \\
\lambda_2^{t-2} & & \lambda_t^{t-2}
\end{vmatrix}
$$

$$= \prod_{k=2}^{t} (\lambda_k - \lambda_1) \cdot W(\lambda_2, \dots, \lambda_t)$$

$$= \prod_{k=2}^{t} (\lambda_k - \lambda_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq t} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq t} (\lambda_j - \lambda_i)$$

CAL 29 Ainsi $\det(V) \neq 0$ car les λ_j sont deux à deux distincts.

Ainsi : $0 = \det(A) = (\lambda_1 \times \dots \times \lambda_t) \det(V)$

D'où : A possède une valeur propre nulle.

<u>On montre par récurrence sur n que A est nilpotente.</u>

- pour $n = 1$: $A = (a)$ et alors $\mathrm{Tr}(A) = a = 0$
  Donc A est la matrice nulle.

- On suppose que c'est vrai pour $n-1$.
  Comme 0 est valeur propre de A, alors A est semblable à une matrice B triangulaire par blocs de la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha \\ \hline 0_{n-1} & C \end{array} \right) \qquad \alpha \in M_{1,n-1}(\mathbb{C})$$

Alors on a que :

$$B^h = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha C^{h-1} \\ \hline 0_{n-1} & C^h \end{array} \right)$$

Ainsi : $\mathrm{Tr}(B^h) = \mathrm{Tr}(A^h) = 0 \quad \forall h \in [\![1, n-1]\!]$

donc $\mathrm{Tr}(C^h) = 0 \quad \forall h \in [\![1, n-1]\!]$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a que C est nilpotente

Si p est l'indice de nilpotence de C, alors

$$B^{p+1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha C^p \\ \hline 0_{n-1} & C^{p+1} \end{array} \right) = 0$$

donc B est nilpotente, et A aussi.
L'hérédité est vérifiée.

Remarques :

1) La première étape peut se faire plus rapidement (et même généralise le résultat pour un corps K de caractéristique 0).
On pose $\chi_A(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$
Alors d'après Cayley-Hamilton :
$0 = \chi_A(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$
On applique la trace pour trouver, grâce aux hypothèses : $a_0 \times n = 0$
D'où $a_0 = 0$
Or $0 = a_0 = \det(A) = \det(A - 0 I_n) = \chi_A(0)$.
Donc 0 est valeur propre de A.

2) Si on se place sur un corps de caractéristique p qui ne divise pas n, le résultat tient toujours.
Mais si $p | n$, ce n'est pas le cas.
Par exemple : sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on prend $A = I_n$
Alors $\mathrm{tr}(A) = \bar{2} = \bar{0}$ et $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A) = \bar{0}$
Mais I_n n'est pas nilpotente.