Théorèmes de Sylow

1 Théorèmes de Sylow

Référence(s) :

— Daniel Perrin ; *Cours d'algèbre*

Leçons associées : 101, 103, 104

Définitions : Soient G un groupe de cardinal n et p un diviseur premier de n. Si $n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$, on appelle p-sous-groupe de Sylow de G un sous-groupe de G de cardinal p^α.
Un groupe de cardinal p^α avec p premier et α entier est appelé un p-groupe.

Théorème(s) :

Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ avec p un nombre premier qui ne divise pas m.

1. G contient au moins un p-sous-groupe de Sylow.
2. Si H est un sous-groupe de G qui est un p-groupe, il existe un p-Sylow S tel que $H \subset S$.
3. Les p-Sylow sont tous conjugués (donc leur nombre k_p divise n)
4. On a : $k_p \equiv 1 \pmod p$ (donc k_p divise m)

Démonstrations :

On se donne un groupe G de cardinal $n = p^\alpha m$ comme dans l'énoncé.
On utilise les résultats intermédiaires suivants :

Lemme 1 : L'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes forme un p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ pour p premier et $n \in \mathbb{N}^*$.
Lemme 2 : Soit H un sous-groupe de G. Soit S un p-Sylow de G. Alors il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H.

Lemme 3 : Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X, et soit X^G l'ensemble des points fixes de X sous l'action de G, alors on a : $|X| \equiv |X^G| \pmod p$.
Le **Lemme 1** s'obtient par dénombrement des bases de $\mathbb{F}_q^n$ et des matrices triangulaires supérieures strictes.

Le **Lemme 3** est une conséquence de la formule des classes.

*Démonstration du **Lemme 2** :*

On fait opérer le groupe G sur G/S (l'ensemble des classes à gauche de G par S) par translation à gauche. Soit $a \in G$, le stabilisateur de aS pour cette action est aSa^{-1}.
H opère lui aussi sur G/S par restriction, et le stabilisateur de aS pour l'action de H est $aSa^{-1} \cap H$.
Pour tout $a \in G$, le groupe $aSa^{-1} \cap H$ est un p-groupe. On montre qu'il existe un $a \in G$ tel que $|H/(aSa^{-1} \cap H)|$ soit premier avec p :
On a : $|H/(aSa^{-1} \cap H)| = |\mathcal{O}(aS)|$ le cardinal de l'orbite de aS dans G/S sous l'action de H.
Si toutes les orbites sont de cardinal divisible par p, alors comme les orbites forment une partition de G/S, $|G/S|$ serait aussi divisible par p. Comme S est un p-Sylow de G, ce n'est pas possible ; donc il existe $a \in G$ tel que $|H/(aSa^{-1} \cap H)|$ est premier avec p, et un tel sous-groupe $aSa^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H.

Démonstration de 1. :
On plonge G dans $\mathfrak{S}_n$ (par théorème de Cayley) puis on plonge $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{F}_\text{ı})$ en associant à une permutation sa matrice dans la base canonique.
On a donc identifié G à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$. D'après le **Lemme 1** $GL_n(\mathbb{F}_p)$ possède un p-Sylow, et le **Lemme 2** garantit donc l'existence d'un p-Sylow de G.

Démonstration de 2. :
Soit H un p-sous-groupe de G. Soit S un p-Sylow de G. D'après le **Lemme 2**, il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H. Comme H est un p-groupe, on a donc : $aSa^{-1} \cap H = H$, donc $H \subset aSa^{-1}$. Or aSa^{-1} est un p-Sylow de G.

Démonstration de 3. :
On reprend le même raisonnement que pour 2., en considérant cette fois-ci que H est un p-Sylow. On a donc : $H = aSa^{-1}$ par égalité des cardinaux et donc H est conjugué à S.

Démonstration de 4. :
Soit X l'ensemble des p-Sylow de G. On fait opérer G par conjugaison sur X. Soit S un p-Sylow de G, S opère également sur X, et le **Lemme 3** donne :

$$|X| \equiv |X^S| \text{ (mod. } p)$$

Montrons que $|X^S| = 1$:
On a directement que $S \in X^S$. On va montrer que S est le seul point fixe pour l'action de S sur X.
Soit T un p-Sylow normalisé par S (donc dans X^S).
On considère le sous-groupe de G engendré par S et T, que l'on note N. On a S et T des p-Sylow de N, et $S \subset N$ et $T \subset N$.
Or, comme S normalise T, on a T distingué dans N. Comme les p-Sylow sont conjugués, T est l'unique p-Sylow de N, donc $T = S$.