

Question !

Décomposition polaire : $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq GL_n(\mathbb{R})$

①: Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact :

$O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ qui est un e.v.n de dimension finie.
il suffit donc de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé, borné.

i) fermé: $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M M = \mathbb{I}_n\}$

$$= N^{-1}(\{\mathbb{I}_n\})$$

$$= \text{Ker}(N)$$

d'où: $N: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$

$$M \mapsto {}^t M M$$

qui est continue, car polynôme en les coefficients de $M \in GL_n(\mathbb{R})$

ii) borné: $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \|Ox\|_2 = \|x\|_2$
 $\forall O \in O_n(\mathbb{R})$

d'où: Pour tout $O \in O_n(\mathbb{R}), \quad \|O\|_2 = 1$

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné.

②: $\mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

" $\subseteq$ " on a $\mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$, de plus $\mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$ est par définition le plus petit fermé qui contient $\mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$
et $\mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t x S x > 0\}$

$$= \bigcap_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} N_x^{-1}([0; +\infty[)$$

$\uparrow$ fermé de $\mathbb{R}$

$\uparrow$ $\cap$ q'q. de fermés est fermé

d'où: $N_x: \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$S \mapsto {}^t x S x$$

est continue, car polynôme

" $\supseteq$ " Soit $S \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = S + \frac{1}{k} \mathbb{I}_n$
telle que: $S_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S$
 $\in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$