203
228

Théorème de Heine et applications

- Topologie et analyse 3e année, Skandalis, p 121

SKA 121 · **Théorème de Heine** : Toute application continue d'un espace métrique compact à valeurs dans un espace métrique est uniformément continue.

Dem : Soit (X, d) un EM compact et (X', d') un EM.
Soit $f : X \to X'$ une application continue.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) < \alpha$
$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Par l'absurde, on suppose que ce n'est pas le cas : il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x, y \in X$ avec $d(x, y) < \alpha$ mais $d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.

On prend alors pour tout $n \geq 1$, $\alpha = \frac{1}{n}$ et ainsi il existe des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ à valeurs dans X tel que :
$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Comme X est compact, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge dans X, disons vers a.
Comme $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) < \frac{1}{\varphi(n)}$, alors $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ tend vers 0 et donc par inégalité triangulaire de d, on obtient que $(y_{\varphi(n)})$ converge aussi vers a.

Comme f est continue en a, les suites $(f(x_{\varphi(n)}))$ et $(f(y_{\varphi(n)}))$ convergent vers $f(a)$.

On pour tout n, on a :

$$\varepsilon \leq d'(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)}))$$
$$\leq d'(f(x_{\varphi(n)}), f(a)) + d'(f(a), f(y_{\varphi(n)}))$$

En passant à la limite, on obtient que $\varepsilon \leq 0$ contradiction.

Donc f est uniformément continue sur X.

- <u>Application</u> : Soit $[a,b]$ un segment et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. On a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{(b-a)}{n}\right)$$

<u>Dém</u> : Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, il existe $\alpha > 0$ tq $\forall\, x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} < \alpha$

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$

Alors $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall\, t \in [a_k ; a_{k+1}]$, comme $|t - a_k| \leq \frac{b-a}{n} \leq \alpha$, alors $|f(t) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Or d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$$

Comme $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$, alors on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - (a_{k+1} - a_k)\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\,dt\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| \, dt \quad \text{par inégalité triangulaire}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon \, dt$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = (b-a)\,\varepsilon \quad \text{vrai pour } n > \frac{b-a}{\alpha}$$

On a bien la convergence.

• <u>Application</u> : Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Dém</u> : On suppose que f est T-périodique.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le compact $[-2T ; 2T]$
Ainsi :

$$\exists \delta > 0, \ \forall x, y \in [-2T ; 2T], \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x-y| < \delta$. On suppose que $\delta \leq T$ quitte à en prendre un + petit.
On sait qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$x' = x + kT \in [0 ; T]$.
Alors $y' = y + kT \in [x' - \delta ; x' + \delta] \subset [-T ; 2T]$
Et : $|x' - y'| = |x - y| < \delta$.
Alors :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x+kT) - f(y-kT)| \quad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique}$$
$$= |f(x') - f(y')| < \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.