

Leçons :

• 266 : utilisation de la notion d'indép. en proba.

• 262 : CV des suites de n.a.
Thm. limites. Ex/Apl.

DEV : Lemme de Borel-Cantelli

Ref: [Barbe-Ledoux]

① Thm : Lemme de Borel-Cantelli :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

i) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) < +\infty$ alors $IP(A_n \text{ i.s.}) = 0$

$\leftarrow = \{A_n \text{ a lieu une infinité de fois}\}$

ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty \Rightarrow IP(A_n \text{ i.s.}) = 1$

② Application : (Exemple II.2.2 iii) p.114)

CV P $\nrightarrow$ CV p.s. Contre exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n \sim \beta(\frac{1}{n})$
une suite de n.a.c.i.d

$$\text{c.-à-d. : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} IP(X_n = 1) = \frac{1}{n} \\ \text{et} \\ IP(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

Preuve : ① Thm

i) évident, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq k} A_m \subseteq \bigcup_{m \geq n} A_m$

$$\text{D'où : } IP\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq k} A_m\right) = IP(A) \leq IP\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) \leq \sum_{m \geq n} IP(A_m)$$

ii
 $IP(A_k \text{ i.s.})$

or $R_n := \sum_{m \geq n} IP(A_m)$ est le reste de $\sum_{n \in \mathbb{N}} IP(A_n)$ qui CV par hypoth.

$$\text{Denc : } R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{D'où : } IP(A_k \text{ i.s.}) = 0$$

ii) Par hypothèse les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants.

Donc les $(A_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants et on obtient:

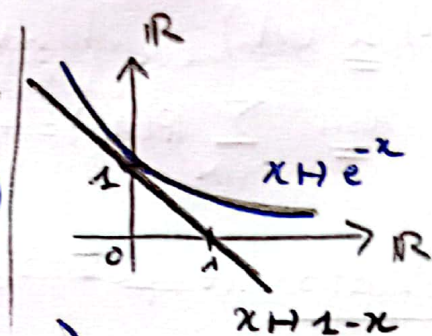
$$P\left(\bigcup_{n \leq m \leq N} A_m\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n \leq m \leq N} A_m^c\right)$$

$$= 1 - \prod_{n \leq m \leq N} P(A_m^c)$$

$$= 1 - \prod_{n \leq m \leq N} (1 - P(A_m))$$

Comme $1-x \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$ ←

on obtient: $\forall m \in [n, N], 1 - P(A_m) \leq e^{-P(A_m)}$



D'où: $P\left(\bigcup_{n \leq m \leq N} A_m\right) = 1 - \exp\left(-\sum_{n \leq m \leq N} P(A_m)\right)$

Par hypothèse, $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \text{ DV}$, d'où:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=n}^N P(A_m) = +\infty$$

D'où: $\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^N A_m\right) = 1$

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right)$$

or: $\{A_n \text{ i.s}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$

D'où: $P(\{A_n \text{ i.s}\}) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{P\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right)}_{=1} \boxed{= 1}.$$

② Application :

on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \beta(p_n)$ où $p_n = \frac{1}{n}$, une suite de v.a.i.i.d.

On a alors : $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ et $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Par définition : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{IP} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$

D'où par construction pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Or par le lemme de Borel - Cantelli, on a :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.S} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} < +\infty$$

absurde $\rightarrow \varepsilon$

D'où : $X_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.S} 0$ et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{IP} 0$

□

Bonus: Par un jeu d'écriture, on peut facilement montrer
que $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{IP} X$

En effet: $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P(\{|X_n - X| > \varepsilon, i.s.\}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\sup_{n \geq N} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X_n \xrightarrow{IP} X$$