

Leçons:
203, 204, 223, 226

Proposition: (Branche)

Soit (E, d) un espace métrique compact. Prenons (u_n) une suite d'éléments de E tq $d(u_n, u_{n+1}) \rightarrow 0$.
Valeurs Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) , Γ est connexe.

Application:

Soit $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue. Prenons (a_n) une suite d'éléments de $[0,1]$ tq $a_{n+1} = f(a_n)$ et $x_0 \in [0,1]$.
 (a_n) cvssi $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$

References:
[GOU]: Gœrden,
Analyse

v2

Pour la proposition, p. 46 [GOU]

• Hy Γ est compact

Pour $p \in \mathbb{N}$, en notant $A_p = \{u_n \mid n \geq p\}$.

On a que $\Gamma = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$ donc Γ est fermé.

Or $\Gamma \subset E$ qui est compact donc Γ est compact.

Raisonnons par l'absurde et soy Γ n'est pas connexe.

• Mettre en place un bon contexte

Prenons A, B 2 fermés disjoints tq $\Gamma = A \cup B$. Remarquons que A et B sont compacts (car Γ compact)

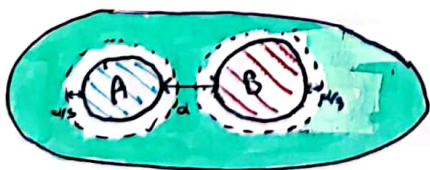
Posons $\alpha = d(A, B)$ et notons:

$$A' = \{x \in E \mid d(x, A) < \frac{\alpha}{3}\} \quad \text{et} \quad B' = \{x \in E \mid d(x, B) < \frac{\alpha}{3}\}$$

A' et B' sont des ouverts (image réciproque ^{d'un ouvert} par la distance à une partie qui est continue car 1-lip.).

Notons $K = E \setminus (A' \cup B')$, donc K est fermé, inclus dans E compact donc K est compact.

Récapitulons sur un dessin:



/// : B

/// : A

■ : $K = E \setminus (A' \cup B')$

• $M_q(u_n)$ a une valeur d'adhérence dans K

Puisque $d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ on a :

il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tq pour $n \geq N_0$ $d(u_{n+1}, u_n) < \frac{\alpha}{3}$.

→ construisons $u_{n_1} \in A'$

Prendons $N \geq N_0$ et $a_0 \in A'$ (par def. a_0 est une valeur d'adhérence de (u_n))

Donc il existe $n_1 > N$ tq $d(a_0, u_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$ (car a_0 v.a.)

On a donc $u_{n_1} \in A'$.

→ Construisons $u_{n_2} \in B'$

Prendons $y_0 \in B$, y_0 est une valeur d'adhérence de (u_n)

Donc il existe $n_2 > n_1$ tq $d(y_0, u_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$

On a alors $u_{n_2} \in B'$.

→ M_q il existe $m_0 \geq N$ tq $u_{m_0} \in K$.

Soit m_0 le 1^{er} entier supérieur à n_2 tq $u_{m_0} \notin A'$ (cet entier existe $m_0 \in \{n_1+1, \dots, m_2\}$, au pire m_2 convient)

On a donc $u_{m_0-1} \in A'$.

On $d(u_{m_0-1}, B) \leq d(u_{m_0-1}, u_{m_0}) + d(u_{m_0}, B)$

D'où

$$\begin{aligned} d(u_{m_0}, B) &\geq d(u_{m_0-1}, B) - d(u_{m_0-1}, u_{m_0}) \\ &\geq \frac{d(A, B) - d(A, u_{m_0-1})}{=2} - \frac{d(u_{m_0-1}, u_{m_0})}{< \frac{\alpha}{3}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} d(A, B) \leq d(A, u_{m_0-1}) \\ + d(u_{m_0-1}, B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} < \frac{\alpha}{3} \\ < \frac{\alpha}{3} \end{array}$$
$$> \frac{\alpha}{3}$$

Donc $u_{m_0} \notin B'$ et $u_{m_0} \notin A'$ donc $u_{m_0} \in K$.

• Venons en à l'absurdité:

On a pour tout $N \geq N_0$ qu'il existe $m_0 \geq N$ tq $u_{m_0} \in K$. On peut donc construire une sous suite (u_{p_m}) de (u_n) tq (u_{p_m}) soit à valeur dans K qui est compact. Donc (u_n) a au moins une valeur d'adhérence dans K . Ce qui est **ABSURDE**, puisque K ne rencontre pas M .

□

Pour l'application,

Remarquons que $(\Rightarrow)$ est direct.

Pour $(\Leftarrow)$, raisonnons par l'absurde et ay (a_n) ne cv pas.

• H₁ I est un intervalle fermé de $[0,1]$

(a_n) est une suite de $[0,1]$ donc (a_n) est bornée donc par

Bolzano-Weierstrass (a_n) admet une sous suite cv.

Donc (a_n) admet une valeur d'adhérence (même au moins 2 car (a_n) ne cv pas) et ce qui précède

Donc par le lemme^v on a que $I = [\alpha, \beta]$ ($\alpha, \beta \in [0,1]$)

• H₂ I est constitué de point fixe

Soit $p \in I$, il existe une extractrice φ tq $a_{\varphi(m)} \rightarrow p$. Donc

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varphi(m)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varphi(m)+1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a_n - a_{n+1} \rightarrow 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{\varphi(m)}) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{par continuité de } f \\ &= f(p) \end{aligned}$$

• Venons en à l'absurdité

$\frac{\alpha + \beta}{2}$ est une valeur d'adhérence donc il existe m_0 tq $a_{n_0} \in [\alpha, \beta]$

Or I est fermé de point fixe donc pour tout $n \geq m_0$ $a_n = a_{n_0}$

donc après (a_n) est stationnaire et donc cv.

D'où l'absurdité.

□

Conclusions:

- savoir que d à une partie est $d \cdot p$
- savoir que $B \cdot d$
- savoir montrer avec - équation continue