

Leçons:
230, 249, 264, 266

Fonction Zeta:

$\zeta: s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est bien définie et continue sur $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$

Zeta et nombres premiers

Soit p_n le n -ème nombre premier, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

Corollaire:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

références:
[101]: Bombardi,
algèbre et géométrie
[60]: Analyse,
Gaudier.

Montrons que ζ est bien définie et continue: (à enlever si dev trop long)

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est continue sur D .

• Soit $K \subset D$ un compact. $K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur un compact
 $\zeta \mapsto \operatorname{Re}(\zeta)$

donc est bornée et atteint ses bornes posons alors $\alpha := \inf_{s \in K} \operatorname{Re}(s)$

Donc $\forall s = a + ib \in K$ on a :

$$\begin{aligned} |n^s| &= |n^{a+ib}| \\ &= |n^a| |e^{ib \ln(n)}| \\ &= n^a \\ &\geq n^\alpha \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{Donc } \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

Or la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente par critère de Riemann ($\alpha > 1$)

Donc $\sum \frac{1}{n^s}$ cm donc cm sur tout compact de D .

Finalement ζ est bien def. et continue

□

Montrons le 2ème thm: CROMS p. 399-395

① Définissons une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, P(\mathbb{N}^*))$ en posant:

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, P(m) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{m^\alpha} \quad \text{avec } \alpha > 1$$

Vérifions que c'est bien une probabilité:

- $\forall m \in \mathbb{N}^*, P(m) > 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé:

$$\sum_{k=1}^N P(k) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha}}_{CV}$$

Donc en faisant $N \rightarrow +\infty$ on trouve

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(k) = 1$$

Donc P est une proba.

② Calculons $P(p|\mathbb{N}^*)$ où $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(p|\mathbb{N}^*) &= P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{kp\}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{car union disjointe} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(kp) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{(kp)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{p^\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \\ &= \frac{1}{p^\alpha} \end{aligned}$$

③ Calculons $P\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_m \mathbb{N}^*)\right)$ (où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est l'ensemble des nombres premiers ordonnés.)

Regardons qui est l'ensemble $\bigcap_{m=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_m \mathbb{N}^*)$

$$m \in \bigcap_{m=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_m \mathbb{N}^*) \quad \text{soit} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad m \in \mathbb{N}^* \setminus p_m \mathbb{N}^*$$

$$\text{soit} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad m \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad m \notin p_m \mathbb{N}^*$$

$$\text{soit} \quad m = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad P\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_m \mathbb{N}^*)\right) &= P(1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

④ Vérifions que $(p_n \mathbb{N}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants

Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ une partie finie.

$$\begin{aligned} \bigcap_{k \in I} p_k \mathbb{N}^* &= \text{ppcm}_{k \in I} (p_k) \mathbb{N}^* \\ &= \prod_{k \in I} p_k \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ car les } p_k \text{ sont premiers}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad P\left(\bigcap_{k \in I} p_k \mathbb{N}^*\right) &= P\left(\prod_{k \in I} p_k \mathbb{N}^*\right) \\ &= \frac{1}{\prod_{k \in I} p_k} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ d'après étape 2}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{k \in I} \frac{1}{p_k} \\ &= \prod_{k \in I} P(p_k \mathbb{N}^*) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ étape 2}$$

D'où l'indépendance.

⑤ Venons en au résultat

Posons $A_n = \bigcap_{k=1}^n (N^* \setminus p_k N^*)$

(A_n) est une suite décroissante d'événements.

Donc $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (N^* \setminus p_n N^*)$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$

$= P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (N^* \setminus p_n N^*)\right)$ $\downarrow$ étape 3

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \frac{1}{Z(\alpha)} \quad (*)$

Puisque les $(p_k N^*)_{k \in N^*}$ sont indep. alors $(N^* \setminus p_k N^*)_{k \in N^*}$ sont indep. aussi.

Donc

$P(A_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (N^* \setminus p_k N^*)\right)$

$\downarrow$ indépendance.

$= \prod_{k=1}^n P(N^* \setminus p_k N^*)$

$= \prod_{k=1}^n (1 - P(p_k N^*))$

$\downarrow$ étape 2

$= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$

En passant à la limite on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$

et avec $(*)$ on conclue

□

Montrons le corollaire :

$$\underline{M_q \{s\} \sim \frac{1}{s-1} : \text{[GOU] p.303}}$$

Soit $s > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par comparaison série intégrale on a :

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \frac{1}{n^s} \quad (t \mapsto \frac{1}{t} \text{ décroissante})$$

donc soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^s} - 1$$
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_1^N \frac{1}{t^s} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}$$

En faisant $N \rightarrow +\infty$

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s)$$
$$= \frac{1}{s-1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = \left[\frac{1}{-s+1} t^{-s+1} \right]_1^{\infty}$$
$$= - \frac{1}{1-s}$$

$$\text{Donc } \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$$

$$\text{Donc } \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \quad \text{donc } \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\text{et } \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s).$$

$$\text{D'où } \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\text{En multipliant par } (s-1) \text{ on en déduit } \zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$$

$$\text{Par l'absurde on } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \text{ cv [GOU] p.304.}$$

$(\frac{1}{p_n})$ tend vers 0 donc

$$\ln(1 - \frac{1}{p_n}) \sim -\frac{1}{p_n}$$

Donc $\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} \sim \frac{1}{p_n}$
 Neill's fac.

Donc $\ln\left(\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) = \sum_{n=1}^N \ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$

Puisque on a supposé que $\sum p_n$ CV on a que
 (1) converge et donc $\left(\ln\left(\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite

(matems la $p \in \mathbb{R}$)

Par continuité de l'exponentielle on a :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = e^p < \infty$$

Or $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1} \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = e^p$

donc ζ est majoré. Ce qui est absurde d'après l'équivalent
 calculer juste avant. □

Savoir prouver la formule sur $\mathbb{R} = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$

Ng $\frac{1}{\zeta(s)}$ halo sur $\mathbb{R}$ (Ng $\sum 1 - p_n$ CVU $\Rightarrow \prod p_n$ CVU)

$\zeta(s)$ s'annule pas sur $\mathbb{R}$...

$\sum \frac{1}{n^s}$ halo sur $\mathbb{R}$..

probl. analytique,