

Leçons:

159, 214, 215, 219

Lemme:

Soient $v, u_1, \dots, u_k$ des formes linéaires sur E
tq $u_1, \dots, u_k$ soient linéairement indépendantes
et $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(u_i) \subset \text{Ker}(v)$. Alors, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
 $\in K$ tq $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$.

Références:

CAVES: Avec Calcul diff.

CAVES: L'afaire, Intro d'une var. diff.

Théorème: Extrema liés

Soient $f, g_1, \dots, g_p: O \rightarrow \mathbb{R}^m$ et où O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Notons $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0, i=1, \dots, p\}$

Si $f|_M$ admet un extremum en $a \in M$ et

$dg_{1,a}, \dots, dg_{p,a}$ sont des f.p linéairement indep. alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq

$$df_a = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_{i,a}$$

Pour le lemme:

complétons les $u_1, \dots, u_k$ en une base:

$$B^* := (u_1, \dots, u_m)$$

Et soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base duale

on peut donc écrire v dans B^* , soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tq

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

$$\text{Or } \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(u_i) = \{x \in E \mid \forall i \in \{1, \dots, k\} \ u_i(x) = 0\} \quad \downarrow \text{def.}$$
$$= (\text{vect}(u_1, \dots, u_k))^0$$
$$= \text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

$$\text{Or } \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(u_i) \subset \text{Ker}(v)$$
$$= \text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

Donc pour $j \in \{k+1, \dots, n\}$ $v(e_j) = 0$, or $v(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(e_j)$ $\downarrow$ car $(e_1, \dots, e_k)$ base ortho de $(u_1, \dots, u_k)$

$$= \lambda_j$$

D'où le résultat.

□

Pour le théorème:

• On va déjà remarquer que M est une sous variété de dim. $n-p$

→ Pour cela on va utiliser la caract. par les submersions:

$$\text{Prenons } g: D \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x \mapsto (g_1(x), \dots, g_p(x))$$

Puisque $dg_{1,a}, \dots, dg_{p,a}$ sont des f.p. l.in. indep. on en déduit que dg_a est surjective. Or $dg_a \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est de rg p donc admet un mineur d'ordre p non nul donc par continuité du déterminant ce mineur est non nul au voisinage ^{ouvert} de a . Notons U_a ce voisinage. On a donc que dg est surjective sur U_a .
Ainsi $g|_{U_a}$ est une submersion, car $U_a \cap M = g|_{U_a}^{-1}(\{0\})$

donc par caractérisation des sous variétés par les submersions, M est une sous variété.

→ Maintenant qu'on sait que M est une sous variété, on a par définition qu'il existe un voisinage ouvert U de a et un difféo. $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tq $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\})$.

Quitte à translater on peut supposer que $\varphi(a) = 0$.

• My $T_a M$ est un s.v. de $\mathbb{R}^n$ de dim. $n-p$. ELAF3 p.33

→ Pour cela on va my $d\varphi_a(T_a M) = \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$

[C] Prenons $v \in T_a M$ et I un intervalle ouvert centré en 0.

Prenons $\gamma: I \rightarrow M$ qui est $\mathcal{C}^1$ tq $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$

Quitte à restreindre I , on peut sq pour tout $t \in I$ $\gamma(t) \in U \cap M$

Ainsi, pour $t \in I$ $\varphi \circ \gamma(t) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$

Par théorème des fonctions composées on a:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \gamma)'(0) &= d\varphi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\ &= d\varphi_a(v) \end{aligned}$$

Et puisque $\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$ est un sev de dim. finie il est alors fermé.
On en déduit alors que $(\varphi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$ par limite du taux d'accroissement.

Donc $d\varphi_a(v) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$,

Donc $d\varphi_a(T_a M) \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$

□ Réciproquement, prenons $v \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$.

Soit I un intervalle ouvert centré en 0 et $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$

$\eta(0) = 0$ (par ex. prendre $\eta: t \mapsto tv$).

et $\eta'(0) = v$

quitte à restreindre I , on peut avoir pour $t \in I$, $\eta(t) \in \varphi(U)$

Prenons $\gamma = \varphi^{-1} \circ \eta$, γ est $\mathcal{C}^1$, $\gamma(0) = \varphi^{-1}(\eta(0))$
 $= a$

et $\gamma'(0) = (\varphi^{-1} \circ \eta)'(0)$
 $= d\varphi^{-1}_{\eta(0)}(\eta'(0))$
 $= d\varphi^{-1}_0(v)$
 $= (d\varphi_{\varphi^{-1}(0)})^{-1}(v)$
 $= (d\varphi_a)^{-1}(v)$

Donc $v = d\varphi_a(\gamma'(0))$ et $\gamma'(0) \in T_a M$ (γ vérifie la def.)

Donc $v \in d\varphi_a(T_a M)$

Donc $\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\} \subset d\varphi_a(T_a M)$

→ On peut maintenant conclure

On a ainsi $T_a M = (d\varphi_a)^{-1}(\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\})$ donc $T_a M$ est un sev. de dim. $n-p$.

• On va maintenant montrer $T_a M = \text{Ker}(d\varphi_a)$

→ My ces espaces ont même dimensions

On a vu que $\dim(T_a M) = n-p$

Et $d\varphi_a$ est surjective (d'après ce qui précède) donc $\dim(\text{Im}(d\varphi_a)) = p$
 ainsi par théorème du rang $\dim(\text{Ker}(d\varphi_a)) = n-p$

$$\rightarrow \text{Hg } T_a M \subset \text{Ker}(dg_a)$$

Soit $v \in T_a M$ et I un intervalle ouvert centré en 0.

Prenons $\gamma: I \rightarrow M$ t.q. $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$

Donc $g(\gamma(t)) = 0$ pour $t \in I$

On en déduit alors que $(g \circ \gamma)'(0) = 0$ car $0 \in I$.

$$\begin{aligned} \text{Or } (g \circ \gamma)'(0) &= dg_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\ &= dg_a(v) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } dg_a(v) = 0$$

$$\text{Donc } v \in \text{Ker}(dg_a)$$

L'inclusion et l'égalité des dimensions nous donne l'égalité des ensembles: $T_a M = \text{Ker}(dg_a)$ (i)

$$\bullet \text{Hg } T_a M \subset \text{Ker}(df_a)$$

Soit $v \in T_a M$, I un intervalle ouvert centré en 0.

Prenons $\gamma: I \rightarrow M$ t.q. $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$

Puisque a est un extremum de f , 0 est un extremum de $f \circ \gamma$ sur I . Donc $(f \circ \gamma)'(0) = 0$

$$\text{Or } (f \circ \gamma)'(0) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_a(v), \text{ donc } v \in \text{Ker}(df_a)$$

• Concluons avec le lemme:

$$\text{On a } T_a M = \text{Ker}(dg_a) = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(dg_{i,a}) \subset \text{Ker}(df_a) \text{ et}$$

les $dg_{1,a}, \dots, dg_{p,a}$ sont linéairement indep.

$$\text{Donc, il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ t.q. } df_a = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_{i,a}.$$

□