

Leçons:
236, 239, 245, 261

Proposition

Soient $a, \lambda > 0$. Soient $\gamma_{a, \lambda} : t \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$
la densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$.

1) La fonction caractéristique $\varphi_{a, \lambda}$ de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est $\varphi_{a, \lambda}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a$ pour $t \in \mathbb{R}$

2) Pour $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma(a, \lambda)$ admet un moment à tout ordre $m \in \mathbb{N}$ donné par:

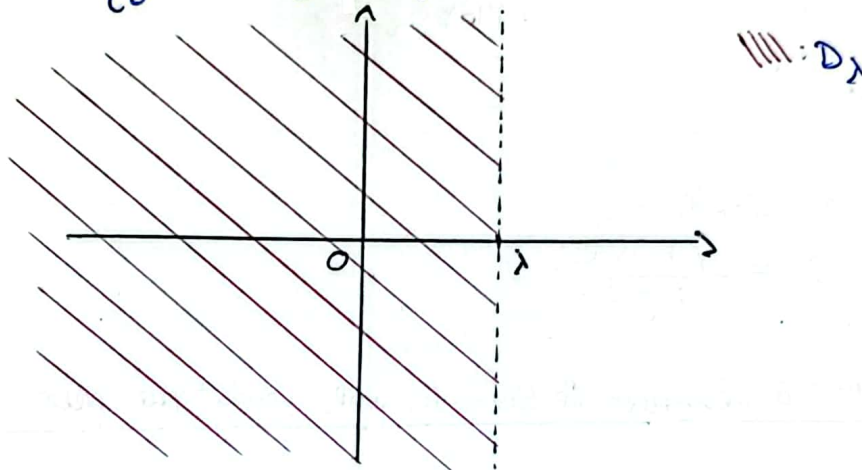
$$m_m := \frac{a(a-1)\dots(a+m-1)}{\lambda^m}.$$

[12]

Références:
[COT]: Collet, Ours
de probas
Zouvi: Ours, Ours
Proba T2.

Pour le 1), [COT] p. 121

Soient $D_\lambda := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < \lambda\}$



Prendons z dans D_λ et $x > 0$. On note $f(z, x) := x^{a-1} e^{-(\lambda - z)x}$.

• Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+^*} f(z, x) dx$ est finie

On a que

$$|f(z, x)| \leq x^{a-1} e^{-(\lambda - \operatorname{Re}(z))x}$$

Or $\lambda - \operatorname{Re}(z) > 0$ car $z \in D_\lambda$.

Donc $\int_{\mathbb{R}_+^*} f(z, x) dx$ est finie

• Définissons une $\Psi : D_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} \gamma_{a, \lambda}(x) e^{zx} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} f(z, x) dx$$

Par ce qui précède on voit que Ψ est bien définie.

$\Rightarrow$ On remarque $\varphi_{a, \lambda}(t) = \Psi(it)$ (*)

→ Trouvons une expression de $\Psi(t)$

Soit $t \in \mathbb{R}$ tq $t < \lambda$. On a :

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda-t}\right)^{a-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda-t} \quad \downarrow \begin{array}{l} \text{cdv:} \\ y = (\lambda-t)x \\ x = \frac{y}{\lambda-t} \end{array} \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{(\lambda-t)^a} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy}_{=\Gamma(a)} \\ &= \frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a}\end{aligned}$$

Posons $h: D_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda-z}\right)^a$

• On va chercher à appliquer le thm de prop. analytique pour mcq. $\Psi = h$ sur D_λ

→ Hq h est holomorphe sur D_λ

Prenons $z \in D_\lambda$. Puisque $\lambda - z = \underbrace{\lambda - \operatorname{Re}(z)}_{\geq 0} + i \operatorname{Im}(z)$ on peut prendre la détermination principale du logarithme et donc :

$$h(z) = \frac{\lambda^a}{e^{a \log(\lambda-z)}} \quad , \text{ on en déduit que } h \text{ est holomorphe sur } D_\lambda.$$

→ Hq Ψ est holomorphe

Prenons $\alpha \in]0, \lambda[$

- Pour $z \in D_\lambda$, $\alpha \mapsto f(\alpha, z)$ est mesurable
- Pour $\alpha > 0$, $z \mapsto f(\alpha, z)$ est holomorphe
- Pour $z \in D_\lambda$ et $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}|f(z, \alpha)| &\leq \alpha^{a-1} e^{-(\lambda - \operatorname{Re}(z))\alpha} \\ &\leq \alpha^{a-1} e^{-\underbrace{(\lambda - \alpha)}_{>0}\alpha}\end{aligned}$$

Le majorant de notre intégrande est intégrable.

Par thm d'holomorphie sous le signe intégral en α que

Ψ est holomorphe sur D_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

Donc Ψ est holomorphe sur $\bigcup_{\lambda > 0} D_\lambda = D$.

→ Appliquons le théorème de prol. analytique

- h et Ψ coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui possède un point d'accumulation
- D_λ est connexe
- Ψ et h sont holomorphes sur D_λ

Finalement on a que Ψ et h coïncident sur D_λ .

• On peut alors conclure avec (*)

$$\begin{aligned}\varphi_{a,\lambda}(t) &= \Psi(it) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a \downarrow \text{par ce qu'il précède.}\end{aligned}$$

Pour 2),

Rappelons un résultat :

Rappel: Cour23 p.204

Si φ_x est k^2 fois dérivable en 0 alors x admet des moments jusqu'à l'ordre $2 \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En particulier $\varphi_x^{(k)}(0) = i^k E(x^k)$

Ψ est holomorphe donc infiniment dérivable en 0, donc de même pour $\varphi_{a,\lambda}$. D'après le rappel on a l'existence des moments.

Pour l'expression, remarquons que :

$$\varphi_{a,\lambda}(t) = \lambda^a (\lambda - it)^{-a}$$

$$\varphi'_{a,\lambda}(t) = \lambda^a i a (\lambda - it)^{-a-1}$$

$$\varphi''_{a,\lambda}(t) = \lambda^a i^2 a(a+1) (\lambda - it)^{-a-2}$$

⋮

$$\varphi^{(m)}_{a,\lambda}(t) = \lambda^a i^m a(a+1) \dots (a+m-1) (\lambda - it)^{-a-m}$$

En évaluant en $t=0$ on a le résultat

□

Commentaires:

- Savoir montrer le rappel (McC + Taylor Young)
- ψ est la transformée de Laplace de la loi $M(a, \lambda)$
- La loi $M(a, \lambda)$ utilisée pour l'analyse de survie:
 - i.e le temps restant avant la mort pour des organismes biologiques ou le temps avant la panne d'un objet.