

Leçons:
203, 235, 239, 241, 246

Equation de la chaleur:

Soit $L > 0$, posons $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$ et $\bar{Q} = [0, L] \times [0, +\infty[$.
Prendons $h \in \mathcal{C}^1([0, L])$ tq $h \geq 0$ et $h(0) = h(L) = 0$.

considérons le problème suivant:

$$(P) \begin{cases} (i) u \in \mathcal{C}(\bar{Q}), u \in \mathcal{C}^2(Q) \\ (ii) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \text{ pour } (x, t) \in Q \\ (iii) u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ pour } t \in [0, +\infty[\\ (iv) u(x, 0) = h(x) \text{ pour } x \in Q \end{cases}$$

(P) admet une unique solution u dans $\mathcal{C}(\bar{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$ qui est:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$\text{où } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx.$$

Références

[EQ3]: Evely Quafflet,
Analyse pour l'ingénieur.

V2

Pour le développement on ne démontrera que l'existence. Pour simplifier les calculs on prend une barre de longueur $L = \pi$.

Pour l'existence, [EQ3] p.110-112

On va procéder par analyse-synthèse.

Analyse:

- On va utiliser la méthode de séparation des variables

(Quitte à ce que ça ne marche pas, on peut essayer... mais ça marchera).

On va alors chercher u sous la forme suivante:

$$u(x, t) = f(x) g(t)$$

D'après (ii) on a $f(x) g'(t) = f''(x) g(t)$

On va chercher une solution tq $f \neq 0$ sur $]0, \pi[$ et $g \neq 0$ sur $]0, +\infty[$
(Quitte à ce que ça ne marche pas, on peut essayer)

Donc

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} \quad \text{pour } (x, t) \text{ dans } Q.$$

Cette égalité ne peut être satisfaite que si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$
tq :

$$\frac{p''(a)}{p(a)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \quad \text{pour } (a, t) \in Q.$$

On a :

$$\begin{cases} f''(a) = \lambda f(a) & a \in]0, \pi[\\ g'(t) = \lambda g(t) & t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

• Trouvons l'expression de g

g vérifie une équation différentielle qu'on sait résoudre, on a :

$$g(t) = C e^{\lambda t} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}^* \quad (C \neq 0 \text{ car } g \neq 0 \text{ sur }]0, +\infty[)$$

• Trouvons l'expression de f :

L'équation caractéristique vérifiée par l'équa. diff. de f est
 $r^2 - \lambda = 0$ de discriminant 4λ .

L'expression de f va alors dépendre des valeurs de λ .

→ Si $\lambda > 0$: (ne pas faire)

Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tq

$$f(a) = A e^{\sqrt{\lambda} a} + B e^{-\sqrt{\lambda} a}$$

• Or $\frac{u(0, t)}{=0} = f(0)g(t)$ et puisque pour $t \in]0, +\infty[$ $g(t) \neq 0$, on a :

$$f(0) = 0 \quad \text{d'où} \quad A + B = 0$$

• Or $\frac{u(\pi, t)}{=0} = f(\pi)g(t)$ de même on trouve $f(\pi) = 0$ donc

$$A e^{\sqrt{\lambda} \pi} + B e^{-\sqrt{\lambda} \pi} = 0$$

On a alors $A e^{\sqrt{\lambda} L} - A e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0$ donc $A = 0$ et donc $B = 0$

D'où $f \equiv 0$. ABSURDE.

→ Si $\lambda = 0$: (ne pas faire)

Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tq

$$f(a) = Aa + B$$

• Or, de la même manière qu'avant on trouve $f(0)=0$
Donc $B=0$.

• De même on trouve $f(\pi)=0$

Donc $A\pi=0$ donc $A=0$

D'où $f \equiv 0$. ABSURDE.

→ Si $\lambda < 0$: (cas intéressant)

Prends $\lambda = -\zeta^2$ avec $\zeta > 0$. Donc $\pm i\zeta$ est solution de l'éq. car.
Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tq

$$f(x) = A \cos(\zeta x) + B \sin(\zeta x)$$

• Or, $\frac{u(0,t)}{=0} = \underbrace{f(0)}_{=0} \underbrace{g(t)}_{\neq 0}$ donc $f(0)=0$ (car $g(t) \neq 0$ pour $t \in]0, +\infty[$)
D'où $A=0$

• De plus, $\frac{u(L,t)}{=0} = \underbrace{f(L)}_{=0} \underbrace{g(t)}_{\neq 0}$ donc $f(L)=0$
Donc $B = \sin(\zeta \pi)$

On a alors que $\zeta = n \in \mathbb{Z}$.

Donc $f(x) = b_n \sin(mx)$.

On a alors une famille de solutions vérifiant (i), (ii), (iii)

$$u_n(x,t) = b_n \sin(mx) e^{-m^2 t}, \text{ où } b_n \in \mathbb{R} \text{ et } m \in \mathbb{Z}.$$

• Mais qu'en est-il du point (iv) ?

On doit avoir $u(x,0) = h(x)$, or $u(x,0) = b_n \sin(mx)$
Or h est une fonction quelconque qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et tq
 $h(0) = h(\pi) = 0$ et $h \neq 0$. Et l'ensemble des fonctions h vérifiant ces
ppt ne sont pas les $b_n \sin(mx)$.

Prendre une somme finie de $b_n \sin(mx)$ pourrait fonctionner
car la condition (ii) est linéaire, mais on a toujours le problème
avec h .

On va alors prendre une somme infinie de $b_m \sin(mx) e^{-m^2 t}$.

On pose alors $u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin(mx) e^{-m^2 t}$.

On a alors $h(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin(mx)$.

• Il faut maintenant trouver les b_m tel que $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin(mx) = h(x)$.

Et c'est apparent la puissance des séries de Fourier.

En effet les b_m doivent être des coefficients de Fourier d'une fonction impaire $\tilde{h}$ qui vaut h sur $[0, \pi]$ et tel que la série de Fourier de $\tilde{h}$ converge vers $\tilde{h}$ sur $[0, \pi]$.

→ Définissons cette $\tilde{h}$:

Prenons,

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -h(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Puisque h est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et $h(0) = 0$ on en déduit que h_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$.

Prenons alors $\tilde{h}$ la fonction 2π -périodique qui vaut h_1 sur $[-\pi, \pi]$.

→ Trouvons les b_m

Ainsi définie, la série de Fourier de $\tilde{h}$ converge normalement vers $\tilde{h}$ et les coef. de Fourier de $\tilde{h}$ sont

$$\begin{cases} a_m(\tilde{h}) = 0 \text{ car } \tilde{h} \text{ impair} \\ b_m := b_m(\tilde{h}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(t) \sin(mt) dt \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{h}(t) \sin(mt) dt \end{cases} \begin{array}{l} \text{car } t \mapsto \tilde{h}(t) \text{ et } t \mapsto \sin(mt) \\ \text{impair et pair} \\ \text{donc } t \mapsto \tilde{h}(t) \sin(mt) \text{ pair} \end{array}$$

Synthèse: Vérifions que $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 t} \stackrel{= u_n(x, t)}{\text{vérifie (p)}}$

• Pour (iv)

Par construction $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x) = h(x)$ pour $x \in]0, \pi[$

• Pour (ii)

c'est ok car $\sin(0) = \sin(n\pi) = 0$

• Pour (i)

$\Rightarrow M_q \quad u \in \mathcal{C}(\bar{Q})$

Pour tout $(x, t) \in \bar{Q}$
 $|b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 t}| \leq |b_n|$

Or $\sum |b_n|$ converge car la série de Fourier de $\tilde{h}$ c.v.m.

Donc u converge normalement et de plus les
 $(x, t) \mapsto u_n(x, t)$ sont continues sur $\bar{Q}$.

Donc u est continue sur $\bar{Q}$.

$\Rightarrow M_q \quad u \in \mathcal{C}^2(Q)$

En fait on va même m_q $u \in \mathcal{C}^\infty(Q)$

• On a que chaque u_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur Q

• Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, prenons $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x \in]0, \pi[$ et $t \in]\varepsilon, +\infty[$ on a

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} u_m}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} (x, t) \right| \leq |b_m| \underbrace{m^\alpha}_{\substack{|\cos(n\pi x)| \text{ ou } |\sin(n\pi x)| \\ \text{dépend parité de } \alpha}} \underbrace{1}_{\substack{|\cos(n\pi x)| \text{ ou } |\sin(n\pi x)| \\ \text{dépend parité de } \beta}} m^\beta e^{-m^2 t} = \underbrace{|b_m| m^{\alpha+2\beta} e^{-m^2 \varepsilon}}_{(*)}$$

Or $b_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ par Riemann Lebesgue donc il existe $c > 0$ t_q

pour tout m , $|b_m| \leq c$

Donc $(*) \leq c m^{\alpha+2\beta} e^{-m^2 \varepsilon}$ qui est le terme général d'une
série convergente

On a donc une convergence uniforme sur tout compact

de toutes les dérivées.

Donc par théorème de dérivation $u \in C^\infty(\mathbb{Q})$.

D'où (i)

Pour (ii)

On peut donc dériver sous le signe somme, donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) = 0$$

$= 0$ par l'analyse

D'où (ii)

ce qui conclut la synthèse. □

Commentaires:

- Savoir faire d'unicité.

unicité: (ne pas faire) pas de ref à priori

Prendons u_1, u_2 2 solutions de (P).

Poseons $w = u_1 - u_2$. w vérifie (i), (ii), (iii) et $w(\cdot, 0) = 0$

$$\text{Posons } e(t) = \int_0^L w^2(x, t) dx \quad t \in [0, +\infty[$$

$\frac{\partial w^2}{\partial t}$ existe et est continue sur $\underbrace{[0, L] \times [0, +\infty[}_{\text{compact}}$

Par thm de dérivation sous l'intégrale :

$$e'(t) = 2 \int_0^L w(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx$$

$$= 2 \int_0^L w(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) dx$$

$$= 2 \underbrace{\left[w(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right]_0^L}_{=0 \text{ avec (iii)}} - 2 \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) dx$$

$$\leq 0$$

En intégrant $e'(t)$, on a: $e(t) - e(0) \leq 0$

donc $e(t) \leq e(0) = 0$ car $w(\cdot, 0) \equiv 0$

Or $e(t) \geq 0$ donc $e(t) = 0$, car $w^2 \geq 0$ et continue

donc $w^2(x, t) = 0$ sur $\bar{Q}$

donc $u_1 = u_2$

□