

Leçons:
204, 214, 215

Théorème:

Soit $f: E \rightarrow E$ $\mathbb{R}^1$ dont la différentielle en tout point est une isométrie alors f est une isométrie affine.

Références:

[GOU]: Gourdon, Analyse.

V2

Pour le théorème, [GOU] p. 349

• H_q pour $a \in E$, il existe un ouvert U_a tq $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ sur U_a
On va procéder par double inégalité.

$$\rightarrow \text{H}_q \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

Pour hypothèse df_a est une isométrie, donc en appliquant l'inégalité des accroissements finis, pour $x, y \in E$:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \underbrace{\|df_a\|}_{=1} \|x - y\|$$

$$\rightarrow \text{H}_q \quad \text{il existe } U_a \text{ tq pour } x, y \in U_a \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$$

Puisque df_a est une isométrie on a que df_a est inversible, df_a et df_a^{-1} sont continues en tant qu'applications linéaires en dim. finie on a par théorème d'inversion locale qu'il existe V_a un voisinage ouvert de a tq $f|_{V_a}: V_a \rightarrow f(V_a)$ est en $\mathbb{R}^1$ -diffé.

Notons $g := f|_{V_a}^{-1}$, et remarquons pour $\gamma = f(a) \in f(V_a)$ dg_γ est une isométrie, en effet:

$$dg_\gamma = df_{f|_{V_a}^{-1}(\gamma)}^{-1} = \underbrace{(df_a)^{-1}}_{\text{inv. locale}} \quad \text{et } df_a \text{ est une isométrie donc } (df_a)^{-1} \text{ isométrie.}$$

Soit $B \subset f(V_a)$ une boule ouverte centrée en $f(a)$. Posons $U_a = g(B)$ (qui est ouvert car g continue par inv. locale).

Appliquons l'IAF sur B (qui est convexe!), soient $\alpha = f(a)$, $\beta = f(y) \in B$
on a:

$$\begin{aligned} \|g(\alpha) - g(\beta)\| &\leq \|dg_\alpha\| \|\alpha - \beta\| \\ &= \|\alpha - \beta\| = \|f(\alpha) - f(\beta)\| \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{car } dg_\alpha \text{ isométrique.}$$

• $H_y \quad df_\alpha = df_y$ pour $\alpha, y \in U_\alpha$

$\rightarrow H_y$ pour $\alpha, y \in U_\alpha$, $h, p \in E$ on a $\langle df_\alpha(h), df_y(p) \rangle = \langle h, p \rangle$

Par ce qu'il précède on a pour $\alpha, y \in U_\alpha$:

$$\langle f(\alpha) - f(y), f(\alpha) - f(y) \rangle = \langle \alpha - y, \alpha - y \rangle \quad (\text{car } E \text{ euclidien})$$

On va différentier en α selon le vecteur h , puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire et $d(\alpha \mapsto \alpha)_\alpha = Id$ on a:

$$\langle df_\alpha(h), f(\alpha) - f(y) \rangle + \langle f(\alpha) - f(y), df_\alpha(h) \rangle = \langle h, \alpha - y \rangle + \langle \alpha - y, h \rangle$$

Donc

$$2 \langle df_\alpha(h), f(\alpha) - f(y) \rangle = 2 \langle h, \alpha - y \rangle$$

En différentiant en y selon le vecteur p , on a:

$$\langle 0, f(\alpha) - f(y) \rangle + \langle -df_y(p), df_\alpha(h) \rangle = \langle 0, \alpha - y \rangle + \langle -p, h \rangle$$

Donc

$$\langle df_y(p), df_\alpha(h) \rangle = \langle p, h \rangle$$

$\rightarrow H_y \quad df_\alpha = df_y$, pour $\alpha, y \in U_\alpha$

$$\begin{aligned} \|df_\alpha(h) - df_y(h)\|^2 &= \|df_\alpha(h)\|^2 - 2 \langle df_\alpha(h), df_y(h) \rangle + \|df_y(h)\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2 \langle h, h \rangle + \|h\|^2 \\ &= \|h - h\|^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{car } df_\alpha, df_y \text{ isométriques} \\ \text{et point précédent} \end{array}$$

donc $df_\alpha = df_y$.

• 119 $M = \{x \in E \mid df_x = df_0\} = E$

→ On a que M est ouvert

En effet, pour $a \in M$ il existe un ouvert U_a tq $df_x = df_a$ par ce qu'il précède.

Or $df_a = df_0$ car $a \in M$ et $df_0 = df_a$ car $a \in U_a$
donc $df_x = df_0$, donc $U_a \subset M$, donc M est ouvert.

→ M est fermé

En effet $M = df^{-1}(\{df_0\})$ donc M est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

→ Finalement, $M \neq \emptyset$ car $0 \in M$, E est connexe (car E est convexe) donc E est connexe et puisque M est un ouvert fermé non vide on a que $M = E$

• Conclusions

df est constante sur E connexe. Posons $u := df_0$

On a $df - u = 0$

Donc $df_x - u(x) = 0$ pour tout $x \in E$

Donc $d(f - u)_x = 0$ pour $x \in E$ ouvert connexe, donc

$f(x) - u(x) = \alpha \in E$

D'où $f(x) = u(x) + \alpha$ et $u = df_0$ est une isométrie

donc f est une isométrie affine.

□

Commentaires:

- Savoir $m_q(O(E), 0)$ groupe (as grp $GP(E)$) voir [ROM] p. 706
- Connaître démo inv. locale [GOU] p. 341
- Connaître $\wedge df_x = 0 \Rightarrow f = \text{cte}$ ($E = \mathbb{R} - \text{ev} \sim \text{connexe} \stackrel{!}{=} \text{connexe par ligne brisée} + \text{IAF sur chaque comp}$) [GOU] p. 42

[GOU] p. 328.

- démo IAF [GOU] p. 327