

Leçons:

261, 262, 264

Théorème: caractérisation de la cv en loi

Soient (X_n) et X des variables aléatoires réelles.

$X_n \xrightarrow{d} X$ si pour tout point α de continuité de F_X
on a $F_{X_n}(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(\alpha)$

Proposition: cv en loi des v.a. discrètes

Soient (X_n) et X des variables aléatoires réelles dans un même ensemble dénombrable $A = \{\alpha_k | k \in \mathbb{N}\}$ discret.

$X_n \xrightarrow{d} X$ si $P(X_n = \alpha_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(X = \alpha_k)$

Application: cv de lois Binomiales vers loi de Poisson

Soient (p_n) une suite d'éléments de $]0, 1[$,
tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$.

Soit $X_n \sim B(n, p_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), alors

$X_n \xrightarrow{d} X \sim P(\lambda)$

Références

[CHAS]: Chabanol, proba stat pour l'éigrey.

[APPD]: Appel, proba pour les mathématiciens

Pour le théorème, [CHAS] p. 58-59

Raisonnons par double implication.

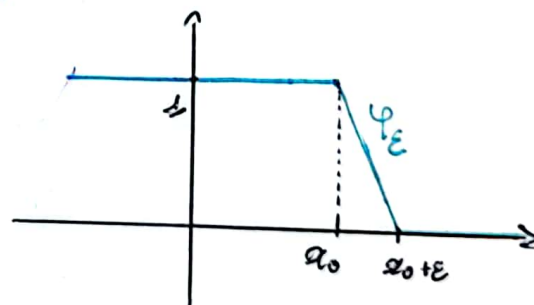
$\Rightarrow$ Supposons que $X_n \xrightarrow{d} X$.

Soit α_0 un point de continuité de F_X , prenons $\varepsilon > 0$.

• Il y a $F_X(\alpha_0 + \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(\alpha_0)$

$\rightarrow$ Définissons une bonne fonction

Posons $\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \alpha_0 \\ 0 & \text{si } x > \alpha_0 + \varepsilon \\ \text{affine sur } [\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon] \end{cases}$



$\rightarrow$ Il y a $E(\varphi_\varepsilon(X)) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(\alpha_0)$

Remarquons que $\varphi_\varepsilon \geq 1_{]-\infty, \alpha_0]}$, donc

$$E(\varphi_\varepsilon(X_n)) \geq P(X_n \leq \alpha_0) = F_{X_n}(\alpha_0)$$

Donc en passant à la limite sup on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(\varphi_\varepsilon(X_n)) = E(\varphi_\varepsilon(X)) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(\alpha_0)$$

$\uparrow$
car $X_n \xrightarrow{d} X$

$$\rightarrow \text{H}_Y \quad F_X(x_0 + \varepsilon) \geq E(\varphi_\varepsilon(X))$$

Remarquons que $\mathbb{1}_{]-\infty, x_0 + \varepsilon]} \geq \varphi_\varepsilon$

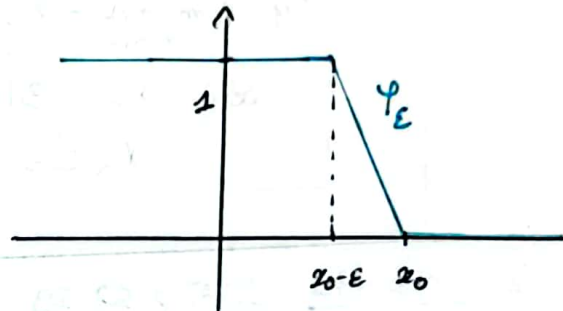
$$\text{Donc } \underbrace{P(X \leq x_0 + \varepsilon)}_{= F_X(x_0 + \varepsilon)} \geq E(\varphi_\varepsilon(X))$$

$$\text{Finalement on a } F_X(x_0 + \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0)$$

• De manière analogue on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0) \geq F_X(x_0 - \varepsilon)$

en considérant cette fois-ci

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_0 - \varepsilon \\ 0 & \text{si } x > x_0 \\ \text{affine sur } [x_0 - \varepsilon, x_0] \end{cases}$$



• Conclusions, on a par continuité de F_X en x_0 que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(x_0 \pm \varepsilon) = F_X(x_0)$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0) \geq F_X(x_0) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0) \quad (\text{ppt de } \lim \text{ et } \lim)$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_0) = F_X(x_0)$$

[R] Pour la réciproque, supposons que pour tout point de continuité x de F_X on a $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$

Prends une $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on peut approcher uniformément φ par des fonctions en escaliers

On sait que F_X est ? donc ses points de discontinuités sont au plus dénombrables

• On peut alors "éviter" ces points de discontinuités

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{R}$ des points de continuité de F_X et $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tq $\|\varphi - g\|_\infty < \varepsilon$ où $g = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}]}$

$$\bullet \text{ N}_Y |E(P(X_n)) - E(P(X))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} |E(\varphi(X_n)) - E(\varphi(X))| &\leq |E(\varphi(X_n)) - E(g(X_n)) + E(g(X_n)) - E(g(X)) + E(g(X)) - E(\varphi(X))| \\ &\leq |E((\varphi - g)(X_n))| + |E(g(X_n) - g(X))| + |E(g(X) - \varphi(X))| \\ &\leq 2\varepsilon + |E(g(X_n) - g(X))| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On } E(g(X_n)) &= \sum_{i=1}^k a_i P(x_i < X_n \leq x_{i+1}) \quad \begin{array}{l} \text{car les } x_i \text{ sont des points de} \\ \text{continuité de } F_X + \text{hypothèses.} \end{array} \\ &= \sum_{i=1}^k a_i (F_{X_n}(x_{i+1}) - F_{X_n}(x_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k a_i (F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)) \\ &= E(g(X)) \end{aligned}$$

Donc il existe un rang pour lequel $|E(g(X_n) - g(X))| \leq \varepsilon$

$$\text{D'où } |E(\varphi(X_n)) - E(\varphi(X))| \leq 3\varepsilon.$$

Donc $X_n \xrightarrow{L} X$.

□

Pour la proposition, CAPP3 p.394

Pour $k, m \in \mathbb{K}$ on note

$$p_k^m := P(X_m = x_k) \text{ et } p_k := P(X = x_k)$$

⇒ Supposons $X_n \xrightarrow{L} X$

$$\rightarrow \text{N}_Y F_{X_n}(x_k) \rightarrow F_X(x_k)$$

On ne peut pas directement appliquer le théorème précédent, en effet les x_k sont les points de discontinuité de F_X (car X est à valeur dans $A = \{x_k | k \in \mathbb{K}\}$)

Pour contre x_k est isolé (car A est discret!) donc il existe un $\varepsilon > 0$ tq $\exists x_k, x_k + \varepsilon$ ne rencontre pas A (si $A = \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ par ex.)

Ainsi F_{X_n} et F_X sont constantes sur $[x_k, x_k + \varepsilon]$ et $x_k + \varepsilon$ est un point de continuité de F_X (car $x_k + \varepsilon \notin A$)

On peut donc appliquer le thm précédent et on a :

$$\frac{F_{X_n}(a_k + \varepsilon)}{= F_{X_n}(a_k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{F_X(a_k + \varepsilon)}{= F_X(a_k)}$$

→ Obtenons cette implication

$$\begin{aligned} P(X_n = a_k) &= P(X \leq a_k) - P(X_n \leq a_{k-1}) \\ &= F_{X_n}(a_k) - F_{X_n}(a_{k-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(a_k) - F_X(a_{k-1}) = P(X = a_k) \end{aligned}$$

• ⇐ Réciproquement, si $P(X_n = a_k) \rightarrow P(X = a_k)$

• Il y a $\sum |p_k^n - p_k| \rightarrow 0$

$$\rightarrow \text{Il y a } \sum_{k \in K} |p_k^n - p_k| = 2 - 2 \sum_{k \in K} \min(p_k^n, p_k)$$

On a que $|p_k^n - p_k| = p_k^n + p_k - 2 \min(p_k^n, p_k)$

En sommant cette relation on a :

$$\sum_{k \in K} |p_k^n - p_k| = 2 - 2 \sum_{k \in K} \min(p_k^n, p_k)$$

$$\rightarrow \text{Il y a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in K} \min(p_k^n, p_k) \rightarrow 1$$

- On a que $\min(p_k^n, p_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_k$

- De plus, $0 \leq \min(p_k^n, p_k) \leq p_k$ or (p_k) est sommable

Donc par crol on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in K} \min(p_k^n, p_k) = \sum_{k \in K} p_k = 1$$

→ Finalement, on a $\sum_{k \in K} |p_k^n - p_k| \rightarrow 0$ en utilisant les 2 relations précédentes.

• Montrer que (F_{X_n}) converge vers F

Remarquons que pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_{X_n}(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{K} \\ x_k \leq x}} \tilde{p}_k \quad \text{et} \quad F_x(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{K} \\ x_k \leq x}} p_k$$

Donc,

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{K} \\ x_k \leq x}} |\tilde{p}_k - p_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{K}} |\tilde{p}_k - p_k| \rightarrow 0$$

ce qui donne la convergence.

• Conclusions

Puisque la convergence implique la convergence on a bien $X_n \xrightarrow{L} X$ en utilisant le thm précédent.

□

Pour l'application, [APP] p. 137. (à faire que si il reste du temps)

Puisque les X_n sont des binomiales (n, p_n) on a

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$\text{Or } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$$

De plus,

$$\rightarrow np_n \rightarrow \lambda \quad \text{d'où } p_n \sim \frac{\lambda}{n} \quad \text{d'où } p_n^k \sim \frac{\lambda^k}{n^k}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (1-p_n)^{n-k} &= e^{(n-k) \ln(1-p_n)} \\ &= e^{-(n-k)p_n + o(1)} \quad \downarrow p_n \rightarrow 0 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Dans la prop. précédente on a :

$$X_n \xrightarrow{I} P(X).$$

□

Commentaires:

- Dans la prop. on montre que (F_{X_n}) conv. vers F , cela vient du fait que point de continuité de F_n et F sont les mêmes.
- Dans la prop. $\Rightarrow$ fausse si A pas discret (voir [APP] p.333 pour un c. ex). Par contre $\Leftarrow$ reste vraie.
- Faire l'appli que si le temps (le dev me paraît long)
- Le thm de cvd appliqué c'est le même que d'hab, juste là c'est une mesure discrète.
- Il faut savoir redémontrer la densité des fonctions en escalier dans $\mathcal{L}_c$ pour 11.100