

Léçons:

201, 203, 234, 235, 239
241

Lemme 1:

Soit $p \in (1, +\infty)$, L^p_c est dense dans L^p

Lemme 2:

Soit p une fonction $\mathcal{C}^\infty$ tq $\begin{cases} p \geq 0 \\ \text{supp}(p) \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\} \\ \int_{\mathbb{R}} p = 1 \end{cases}$

Prenons $p_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Alors pour tout $f \in L^p_c$ $p_\varepsilon * f \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

Théorème:

$\mathcal{C}^\infty_c$ est dense dans L^p

[V2]

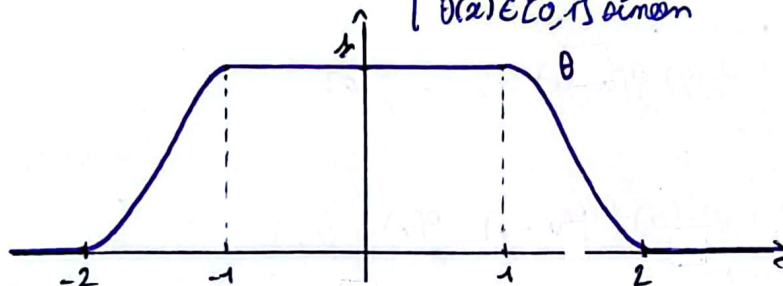
Références

[ZOS]: Zúñiga, Ojeda,
Analyse pour l'agreg.

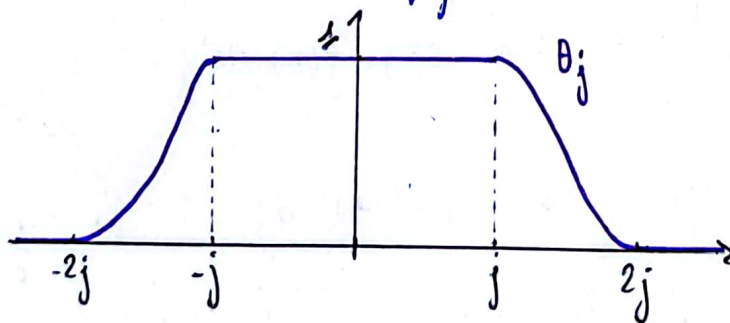
Pour le Lemme 1, [ZOS] p. 323

• Construisons des bonnes fonctions

Prenons $\theta \in \mathcal{C}^\infty_c$ tq $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$
 $\theta(x) \in [0, 1]$ sinon



Définissons $\theta_j : x \mapsto \theta\left(\frac{x}{j}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq j \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2j \end{cases}$
 $\theta_j(x) \in [0, 1]$ sinon



• Obtenons le résultat en utilisant le thm de convergence dominée

Prenons $f \in L^p$ et posons $f_j := f \theta_j \in L^p_c$, mg $f_j \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$:

$$\begin{aligned} \|f_j - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x) \theta_j(x) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |(\theta_j(x) - 1) f(x)|^p dx \end{aligned}$$

Remarquons qu'à x fixé $|\theta_j(x) - 1| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$

On va alors chercher à inverser limite intégrale,

pour cela appliquons le thm de cvd :

→ Il est clair que l'intégrande est mesurable

→ Poser $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$10\left(\frac{x}{j}\right) - 1 \leq |f(x)|^p \leq \left(10\left(\frac{x}{j}\right) + 1\right) |f(x)|^p \leq 2 |f(x)|^p$$

$\frac{j}{x} \leq 1$

Or $x \mapsto 2 |f(x)|^p$ est intégrable car $f \in L^p$.

Donc par cvd on a que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f_j - f\|_p = 0$

Donc $f_j \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ d'où la densité.

□

Poser le lemme 2, [EQ3] p.331

• Regardons $|f_E * f - f|$ et faisons apparaître des exposants conjugués
Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f_E * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} p_E(y) f(x-y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} p_E(y) (f(x-y) - f(x)) dy \right| \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}} p_E(y) dy = 1 \right. \\ &= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} p\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) (f(x-y) - f(x)) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} p(z) (f(x-\varepsilon z) - f(x)) \varepsilon dz \right| \quad \left\{ p \geq 0 \right. \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} p(z) |f(x-\varepsilon z) - f(x)| dz \quad \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right. \\ &= \int_{\mathbb{R}} p^{\frac{1}{q}}(z) p^{\frac{1}{p}}(z) |f(x-\varepsilon z) - f(x)| dz \quad \left\{ \text{Hölder} \right. \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} p(z) dz \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \left(\int_{\mathbb{R}} p(z) |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

• Regardons $\|f_E * f - f\|_p^p$

$$\begin{aligned}
\|p_\varepsilon * f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |p_\varepsilon * f(x) - f(x)|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p(z) |f(x - \varepsilon z) - f(x)|^p dz dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} p(z) \int_{\mathbb{R}} |f(x - \varepsilon z) - f(x)|^p dx dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} p(z) \| \tau_{\varepsilon z}(f) - f \|_p^p dz
\end{aligned}$$

d'après ce qui précède
Par Fubini (fct positives)

• Concluons par convergence dominée et continuité des petites translations

→ Par continuité des petites translations remarquons que,

$$\text{à } z \text{ fixé } p(z) \| \tau_{\varepsilon z}(f) - f \|_p^p \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{a.p.}} 0$$

→ Appliquons alors un théorème de cvd

• oh pour la mesurabilité

• Pour la domination, soit $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
p(z) \| \tau_{\varepsilon z}(f) - f \|_p^p &\leq p(z) (\| \tau_{\varepsilon z}(f) \|_p + \| f \|_p)^p \\
&= p(z) 2^p \| f \|_p^p \\
&= p(z) 2^p \| f \|_p^p
\end{aligned}$$

car $z \mapsto p(z) 2^p \| f \|_p^p$ est intégrable.

Donc par cvd,

$$\|p_\varepsilon * f - f\|_p^p \rightarrow 0$$

□

Pour le théorème, [ZQ] p. 332

• $M_q \mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L_c^p , soit $f \in L_c^p$

→ $M_q p_\varepsilon * f$ est à support compact

Pour élim $p_\varepsilon * f$ est à support compact car p_ε l'est.

→ $M_q p_\varepsilon * f$ est $\mathcal{C}^\infty$

Pour élim de dérivation pour la convol. et puisque p est $\mathcal{C}^\infty$

on a bien que $p_\varepsilon * f$ est $\mathcal{C}^\infty$

→ Appliquons le lemme 2

Par le lemme 2 on a $p_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\|\cdot\|_p} f$ et $p_\varepsilon * f \in \mathcal{C}_c^\infty$
Donc $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^p_c (pour $\|\cdot\|_p$)

• Concluons en appliquant le lemme 1

D'après le lemme 1 L^p_c est dense dans L^p pour $\|\cdot\|_p$

Donc $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^p

□

Commentaires :

→ Soit justifier l'existence de $\theta : \mathcal{C}_c^\infty \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty$ p. 324.325
Déjà il existe $p \in \mathcal{C}^\infty$ tq $\begin{cases} p \geq 0 \\ \text{supp } p \subset \{x \mid |x| \leq 1\} \\ \int p(x) dx = 1 \end{cases}$ c'est

$$p(x) = \frac{p_0(x)}{\int p_0(x)} \quad \text{où} \quad p_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Prenons $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\theta_\varepsilon = p_\varepsilon *^{-1} \theta_\varepsilon$ où $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, E) \leq \varepsilon\}$
(E ensemble mesurable borné).

→ L^∞ pas dense dans $\mathcal{C}_c^\infty$

→ Utilisation $\mathcal{C}_c^\infty$ pour espaces de Schwartz et Sobolev