

Leçons:

205, 208, 228, 235,
246

Théorème: Banach-Steinhaus

Soient E un Banach, F un evm. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de $E \rightarrow F$, on le munit de $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Soit $M \subset \mathcal{L}_c(E, F)$.

→ Soit il existe $M > 0$ tq pour tout $f \in M$
 $\|f\| \leq M$

→ Soit il existe un G_S dense, $\mathcal{R}$ tq
pour $x \in \mathcal{R}$, $\sup_{f \in M} \|f(x)\| = +\infty$

Application:

Il existe des fonctions continues 2π -périodiques dont la série de Fourier diverge en 0.

v2

Références:

CGOJ: Goursat,
Analyse 3ed.

Pour Banach-Steinhaus, CGOJ p.424-425

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{R}_k := \{x \in E \mid \sup_{f \in M} \|f(x)\| > k\}$

• $M_{\mathcal{R}_k}$ est ouvert

Soit $x_0 \in \mathcal{R}_k$, il existe $f \in M$ tq $f(x_0) > k$, mais par continuité de f il existe $p > 0$ tq pour $x \in B(x_0, p)$, $\|f(x)\| > k$ donc $B(x_0, p) \subset \mathcal{R}_k$.

Donc $\mathcal{R}_k$ est ouvert.

• Si chaque $\mathcal{R}_k$ est dense dans E

On a que E est complet, par hypothèse. Donc d'après le théorème de Baire $\mathcal{R} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_k$ est dense dans E .

Donc il existe un G_S dense $\mathcal{R}$ tq pour $x \in \mathcal{R}$ $\sup_{f \in M} \|f(x)\| = +\infty$

• Si il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{R}_k$ ne soit pas dense dans E

On peut prendre $x_0 \in E$ et $p > 0$ tq $B(x_0, p) \cap \mathcal{R}_k = \emptyset$

Donc pour tout $x \in B(x_0, p)$ on a:

$$\sup_{f \in M} \|f(x)\| \leq k$$

Donc pour tout $x \in B(x_0, p)$ on a:

Pour tout $f \in H$, $\|f(x)\| = \|f(x + x_0 - x_0)\|$
 $= \|f(x + x_0) - f(x_0)\|$ } linéarité de f
 $\leq \|f(x + x_0)\| - \|f(x_0)\|$
 $\leq \varepsilon_k$

Par continuité de f , cette inégalité est vraie pour la boule fermée $\overline{B(0, \rho)}$

Ainsi pour $f \in H$ et pour tout $x \in E$ tq $\|x\| \leq 1$, on a
 (i.e. $x \in \overline{B(0, 1)}$)

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho} \|f(\rho x)\|$$

$$\leq \frac{2k}{\rho}$$

} car $\rho x \in \overline{B(0, \rho)}$

Donc pour tout $f \in H$, $\|f\| \in M := \frac{2k}{\rho}$

□

Pour l'application, [GOURS p.424-425 et CRUDS p.130]

• On va d'abord créer de bonnes applications

Pour $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$, on pose

$$l_n : \mathcal{L}_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \longmapsto S_n f(0) = (f * D_n)(0)$$

$$\text{où } \begin{cases} S_n f = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k \\ D_n = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \end{cases}$$

Les l_n sont clairement des formes linéaires.

• Mq $\|l_n\| = \|D_n\|_1$

$\rightarrow$ Mq $\|l_n\| \leq \|D_n\|_1$

Prenons $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$, on a :

$$|l_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) D_n(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |D_n(t)| dt$$

$$\leq \|f\|_1 \|D_n\|_1$$

$\rightarrow$ Mq qu'on a l'égalité

Pour $\varepsilon > 0$, prenons $f_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}$$

On a $f_E \xrightarrow{E \rightarrow 0} g: t \mapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)|} (= \text{sgn}(D_n))$

Nos f_E sont continues, $f_E \in \mathcal{C}_{2\pi}$

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow 0} P_n(f_E) &= \lim_{E \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_E(-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{E \rightarrow 0} f_E(-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) D_n(t) dt \\ &= \|D_n\|_1 \end{aligned}$$

car $|f_E(-t) D_n(t)| \leq \frac{|D_n(t)|}{\text{intégréable sur } [-\pi, \pi]} \text{ indep. de } E.$

Finalement $\|P_n\| = \|D_n\|_1$

• conclusions

On voit que $\|D_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc $\|P_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

De plus $\mathcal{C}_{2\pi}$ est complet, donc d'après Banach Steinhaus (on est dans le 2nd cas, mais P_n ne sont pas uniformément bornés) il existe un G_S dense de fonctions f tq $\|P_n(f)\| \rightarrow +\infty$ ie $|S_n(f)(t)| \rightarrow +\infty$.

□