

155
156
221

Equation de Sylvester

- Analyse, GOURDON, p 470
- Traité de l'algèbre, Eisenmann-Picarte, p 177

GOU 410

Lemme 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$.
Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $\alpha > 0$ et $K > 0$ tel que $\|e^{tA}\| \leq K \cdot e^{-\alpha t}$
 $\forall t \geq 0$.

Dém. Comme $A \in M_n(\mathbb{C})$, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et alors d'après la décomposition de Dunford, on a $A = D + N$ avec D diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et N nilpotente tel que $ND = DN$.

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $D = P D_1 P^{-1}$ où D_1 est diagonale avec les coeffs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur sa diagonale.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, e^{tD_1} est diagonale avec les $e^{t\lambda_i}$ sur la diagonale.

On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme $\|(a_{ij})\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}|$ sur $M_n(\mathbb{C})$.

$$\text{Ainsi : } \|e^{tD_1}\|_\infty = \sup |e^{t\lambda_i}| = \sup e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}$$

On par hypothèse, comme $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$, il existe $c > 0$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -c \quad \forall i$.

$$\text{D'où : } \|e^{tD_1}\|_\infty \leq e^{-ct}$$

Comme $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe $K_1 > 0$ tq : $\|e^{tD_1}\| \leq K_1 \|e^{tD_1}\|_\infty \leq K_1 e^{-ct} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{On } e^{tD} = P \cdot e^{tD_1} \cdot P^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \|e^{tD}\| &= \|P \cdot e^{tD_1} \cdot P^{-1}\| \leq \|P\| \cdot \|e^{tD_1}\| \cdot \|P^{-1}\| \\ &\leq K_2 e^{-ct} \quad \text{avec } K_2 = \|P\| \cdot K_1 \cdot \|P^{-1}\| \end{aligned}$$

On N est nilpotente d'indice q , donc $\forall t \in \mathbb{R}$:
 $e^{tN} = \sum_{h=0}^{q-1} \frac{t^h N^h}{h!}$ donc $\|e^{tN}\| = o(t^q)$ quand $t \rightarrow +\infty$

On voit maintenant donc :

$$\begin{aligned}\|e^{tA}\| &= \|e^{tD+tN}\| = \|e^{tD} \cdot e^{tN}\| \\ &\leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\| = o(t^q e^{-ct})\end{aligned}$$

(car $t^q = o(e^{ct/2})$ alors $e^{-ct} t^q = o(e^{-ct/2})$)

Finalement : $\|e^{tA}\| = o(e^{-\alpha t})$ avec $\alpha = \frac{c}{2} > 0$.

On a bien le résultat. $\square$

IP 178

Equation de Sylvester : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in M_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution X dans $M_n(\mathbb{C})$.

Dém : Comme l'application $S : X \mapsto AX + XB$ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$, qui est un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer qu'elle est surjective pour obtenir l'injectivité et donc l'unicité de la solution.

Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$. On regarde le problème de Cauchy suivant, qui est une équation différentielle d'inconnue $Y : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{cases} Y' = AY + YB \\ Y(0) = C \end{cases} \quad (E)$$

On traite à voir Y comme un vecteur de $\mathbb{C}^n$, et en calculant les produits $AY + YB$, on obtient un système qui se révèle être une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire,

il existe une unique solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ entier, notée $Y: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$

On vérifie alors que $Y(t) = e^{tA} \cdot C \cdot e^{tB}$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A e^{tA} C e^{tB} + e^{tA} C \cdot B e^{tB} \\ &= A Y + e^{tA} C e^{tB} B \end{aligned}$$

Car e^{tB} est un polynôme en B donc commute avec B

$$= A Y + Y B$$

$$\text{Et } Y(0) = I_n \cdot C \cdot I_n = C$$

On va maintenant montrer que $X = -\int_0^{+\infty} Y(s) ds$ est une solution de l'équation de Sylvester.

Soit $t \geq 0$. On intègre Y' entre 0 et t :

$$Y(t) - C = \int_0^t Y'(s) ds = A \int_0^t Y(s) ds + \int_0^t Y(s) ds \cdot B$$

Pour conclure, on doit montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$ et que Y est intégrable sur $[0; +\infty[$.

D'après le lemme 1, il existe $\lambda_1, K_1, \lambda_2, K_2 > 0$ tel que:

$$\|e^{tA}\| \leq K_1 e^{-\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad \|e^{tB}\| \leq K_2 e^{-\lambda_2 t} \quad \forall t \geq 0$$

On pose $K = \max(K_1, K_2)$ et $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Alors:

$$\begin{aligned} \|Y(t)\| &= \|e^{tA} \cdot C \cdot e^{tB}\| \\ &\leq K e^{-\lambda t} \cdot \|C\| \cdot K e^{-\lambda t} \\ &\leq K^2 e^{-2\lambda t} \cdot \|C\| \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{car } \|\cdot\| \text{ est une norme} \\ \text{d'algèbre} \end{array}$$

Ainsi comme $\lambda > 0$, $Y(t) \rightarrow 0$

De plus, $e^{-2\lambda t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc

$\|Y(t)\|$ donc $\int_0^{+\infty} Y(s) ds$ est ACV donc CV

En faisant tendre $t \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$-C = A \cdot \int_0^{+\infty} Y(s) ds + \int_0^{+\infty} Y(s) ds \cdot B$$

Finalement: $C = AX + XB$

$$\text{avec } X = -\int_0^{+\infty} Y(s) ds = -\int_0^{+\infty} e^{tA} \cdot C \cdot e^{tB} dt$$

Remarques:

1) En fait on a le théorème plus général:

Théorème 2: L'équation de Sylvester a une unique solution pour toute matrice $C \in M_n(\mathbb{C})$ ssi A et $-B$ n'ont pas de valeurs propres en commun.

Corollaire 3: Soit A, B qui n'ont pas de vp en commun. Alors si C commute avec $A+B$ et AB , alors C commute aussi avec A et avec B .

Dém: On a:

$$C(A+B) = (A+B)C \quad \text{et} \quad (AB)C = C(AB).$$

On multiplie à gauche par A :

$$\begin{aligned} ACA + ACB &= AAC + ABC \\ &= AAC + CAB \end{aligned}$$

$$\text{d'où: } (AC - CA)B = A(AC - CA)$$

Ainsi $AC - CA$ est solution de l'équation de Sylvester $AX + X(-B) = 0$

D'après le théorème 2, il existe une unique solution qui est 0. D'où $AC = CA$.

Donc C commute avec A , et alors avec

$$(A+B) - A = B$$