205
226

| Théorème du point fixe de Picard |

- Maths pour l'agreg, DANTZER, p 146
- Topologie, QUEFFÉLEC, p 185

DAN 146 **Théorème du point fixe** : Soit (E, d) un espace métrique complet et une application $f : E \to E$ qui est contractante, càd qu'il existe un réel $k \in [0;1[$ tq : $\forall x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq k . d(x, y)$.
Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe.

Dém :

Existence

Soit $u_0 \in E$ et $(u_n)_n$ une suite de E définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Montrons que cette suite est de Cauchy.

On voit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, u_n) &= d(f(u_n), f(u_{n-1})) \\ &\leq k . d(u_n, u_{n-1}) \\ &\leq k^n . d(u_1, u_0) \end{aligned}$$

Alors pour tous entiers positifs p et q tel que $p > q$, on a :

$$\begin{aligned} d(u_p, u_q) &\leq \sum_{n=q}^{p-1} d(u_{n+1} ; u_n) \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{n=q}^{p-1} k^n . d(u_1, u_0) \\ &\leq d(u_1, u_0)\, k^q . \frac{1-k^{p-1}}{1-k} \\ &\leq d(u_1, u_0) \frac{k^q}{1-k} \qquad \text{car } 1-k^{p-q} \leq 1 \qquad (1) \end{aligned}$$

Or comme $0 \leq k < 1$, alors $k^q \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0$.

Ainsi $d(u_q, u_p) \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$

La suite (u_n) est alors de Cauchy, et comme (E, d) est complet, elle est convergente.
On note $l \in E$ sa limite.

On a d'une part $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = l$
Et d'autre part, f est continue car lipschitzienne, ainsi $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(l)$.
Ainsi $f(l) = l$ et donc l est un point fixe.

En faisant tendre p vers $+\infty$ dans (1), on obtient une estimation de la vitesse de convergence :
$$d(u_q, l) \leq \frac{k^q}{1-k}\, d(u_1, u_0) \qquad \forall q \in \mathbb{N}$$

Unicité :
Soit x et y deux points fixes de f. Alors :
$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k.\ d(x, y)$
d'où : $(1-k)\, d(x, y) \leq 0$
Or $1-k > 0$, donc $d(x, y) \leq 0$. Comme une distance est positive, on obtient que $d(x, y) = 0$ c'est-à-dire $x = y$.

QUE 185 Remarque : les hypothèses sont importantes
1) Si $E =]0, 1]$ et $f(x) = \frac{x}{2}$
Alors $f(E) =]0, \frac{1}{2}] \subset E$
Et $|f(x) - f(y)| = |\frac{x-y}{2}| = \frac{1}{2}|x-y|$
donc f est contractante.
Mais f n'a pas de point fixe car si $f(l) = l$

alors $\frac{l}{2} = l$ donc $l = 0$. Or $0 \notin E$.
Cela est dû au fait que E n'est pas complet.

2) Si $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
Alors E est complet et $f(E) \subset E$.
On a que :
$|f(x) - f(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$ avec le IAF
mais f n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$:
Si $f(l) = l$, $\sqrt{l^2+1} = l$ donc $l^2 + 1 = l^2$ donc $1 = 0$.
Cela est dû au fait que f n'est pas contractante.

3) Si $E = [0 ; 1]$ et $f(x) = \frac{x}{2} + 1$
Alors E est complet (fermé dans un complet) et est $\frac{1}{2}$-contractante, mais n'a pas de point fixe dans E
Cela est dû au fait que $f(E) = [1 ; \frac{3}{2}] \not\subset E$

DAN 147 **Lemme 1 :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $l \in E$ et (u_n) une suite de E tel que $\forall r \in [\![0 ; p-1]\!]$, la suite extraite $(u_{mp+r})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers l. Alors (u_n) CV vers l.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$.
$\forall r \in [\![0 ; p-1]\!]$, $\exists m_r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq m_r$,
$d(u_{mp+r}, l) \leq \varepsilon$.
Soit $N = p \times \max\{m_0, \dots, m_{p-1}\}$. Alors $\forall n \geq N$:
$n = mp + r$ avec $r \in [\![0 ; p-1]\!]$ et comme $n \geq N$,
alors $m \geq m_r$ et donc
$d(u_n, l) = d(u_{mp+r}, l) \leq \varepsilon$

Prop 2 : Soit (E, d) un EM complet, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \to E$ tel que l'application $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$

soit contractante. Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe.

<u>Dém</u>: D'après le théorème du point fixe, f^p admet un unique point fixe, noté l.

On mq l est aussi unique point fixe de f.

On a :

$f(l) = f(f^p(l)) = f^{p+1}(l) = f^p(f(l))$

Donc $f(l)$ est point fixe de f^p

Par unicité, on obtient que $f(l) = l$.

D'autre part, on ne peut pas avoir deux points fixes distincts car tout point fixe de f est point fixe de f^p

Soit $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On considère pour $r \in [\![0; p-1]\!]$, la suite extraite $(u_{np+r})_{n \in \mathbb{N}}$

Cette suite peut être définie par son 1e terme u_r et par la relation :

$u_{(n+1)p+r} = f^p(u_{np+r})$ (par rec immédiate)

Ainsi $\forall r \in [\![0; p-1]\!]$, la suite extraite $(u_{np+r})_n$ converge vers l (d'après le théorème du point fixe)

D'après le lemme 1, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge vers l.

Remarques :

1) La prop 2 est utile pour démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz

DAN 148 2) Pour affaiblir l'hypothèse "f contractante", on peut se placer sur un compact

Prop 3 : Soit (E, d) un EM compact (donc complet) et une appli $f : E \to E$ tel que :
$\forall x, y \in E$, $x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$
Alors f admet un unique point fixe

Dém :
Comme f est lipschitzienne, elle est continue
Soit $g : E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto d(x, f(x))$
Comme de plus la distance est continue, alors g est continue sur E qui est compact
Elle atteint alors son minimum :
il existe $l \in E$ tel que
$$\min_{x \in E} d(x, f(x)) = d(l, f(l))$$

Si $f(l)$ était différent de $f(l)$, on aurait
$$d(f(l), f(f(l))) < d(l, f(l)) = \min_{x \in E} d(x, f(x))$$

Contradiction. Donc $f(l) = l$

Si l et l' sont deux points fixes distincts de f, alors :
$d(l, l') =$ $d(f(l), f(l')) < d(l, l')$
Contradiction.
Donc f admet un unique point fixe.