

151

156

Co-diagonalisabilité  
et co-triangularisabilité

- Réduction des endo, Masing, p 94-104-107  
- Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie,  
Rombaldi, p 665 et 678

MAN 94

Def 1: Soit  $I$  un ensemble. Soit  $(m_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ , on dit que la famille est co-diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle chacun des endomorphismes  $m_i$  pour  $i \in I$  admet une matrice diagonale.

Prop 2: Soit  $(m_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes de  $E$  diagonalisables. Alors la famille  $(m_i)_{i \in I}$  est co-diagonalisable si et seulement si ces endomorphismes commutent deux à deux.

ROM 685

Dém: • S'il existe une base dans laquelle chaque  $m_i$  admet une matrice diagonale, alors les endo commutent 2 à 2 car leurs matrices dans cette base sont diagonales donc commutent.

• Pour la réciproque, on raisonne par récurrence <sup>forte</sup> sur la dimension  $n$  de  $E$ .

• Pour  $n = 1$ , le résultat est immédiat car tous les  $m_i$  sont des homothéties donc sont diagonales donc commutent.

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\dim(E) = n+1$  et que le résultat est vrai pour des SEP de  $\dim \leq n$ .

Si tous les  $m_i$  sont des homothéties, le résultat est établi.

Si non il existe  $j \in I$  tel que  $m_j$  n'est pas une homothétie.

Comme  $m_j$  est diagonalisable, on a la décomposition en SEP:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(m_j)} E_\lambda \quad \text{où } E_\lambda = \text{Ker}(m_j - \lambda \text{id})$$



et comme  $m_j$  n'est pas une homothétie, chaque SEP de  $m_j$  est de dimension  $\leq m$ . Comme tous les  $m_i$  commutent avec  $m_j$ , on sait que chaque SEP est stable par  $m_i \forall i \in I$ . Alors l'endo induit de chaque  $m_i$  à chaque  $E_\lambda$  est diagonalisable (car  $m_i$  l'est). On applique alors pour chaque  $E_\lambda$  l'HR à la famille des induits des  $m_i$  à  $E_\lambda$ . On obtient alors pour chaque  $E_\lambda$ , une base de diagonalisation de  $E_\lambda$  commune à tous les induits de  $m_i$  à cet espace. On concatène alors ces bases pour obtenir une base de diagonalisation commune à tous les  $m_i$ .

MAN 107

Def 3: Une famille d'endomorphismes  $(m_i)_{i \in I}$  d'un EV  $E$  est dite co-trigonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle chacun des  $m_i$  admet une matrice triangulaire.

Prop 4: Soit  $(m_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes trigonalisables de  $E$ , qui commutent deux à deux. Alors la famille  $(m_i)_{i \in I}$  est co-trigonalisable.

RON 678

Dém: On peut supposer que tous les  $m_i$  ne sont pas des homothéties sinon le résultat est immédiat.

On montre que les  $m_i$  admettent un vecteur propre commun

On le fait par récurrence sur  $\dim(E) = n$



- Pour  $n=1$ , c'est immédiat car alors tous les  $m_i$  sont des hamatéthies.
- Soit  $\dim(E) = n+1$  et on suppose que le résultat est vrai pour les EV de  $\dim \leq n$ .  
Soit  $j \in \mathcal{I}$ ,  $m_j$  n'est pas une hamatéthie.  
Comme  $m_j$  est trigonalisable, il admet une valeur propre  $\lambda$ . Alors  $0 \leq \dim E_{j,\lambda} = \ker(m_j - \lambda \text{id})$  est de dimension  $\leq n$ , stable par tous les  $m_i$  (car les  $m_i$  commutent avec  $m_j$ ) et par prop d'induct de chaque  $m_i$  si  $E_{j,\lambda}$  est trigonalisable (car  $m_i$  l'est).  
Ainsi par HP, il existe donc un vecteur propre  $x \in E_{j,\lambda}$  commun à tous les  $m_i$ .

On montre la co-trigonalisabilité

On raisonne par récurrence forte sur  $n = \dim(E)$ .

- Pour  $n=1$ , c'est OK
- Soit  $\dim(E) = n+1$  et on suppose que le résultat est vrai pour les EV de  $\dim \leq n$ .  
Soit  $j \in \mathcal{I}$  et soit  $e_j$  un vecteur propre commun à tous les  $m_i$ .

On utilise alors le théorème de la base incomplète pour compléter  $e_j$  en une base  $B = (e_1, \dots, e_{n+1})$

Alors la matrice de chaque  $m_i$  dans  $B$  est de la forme :

$$A_i = \text{Mat}_B(m_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & & & B_i \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{où } L_i \in M_{1,n}(K) \text{ et } B_i \in M_n(K)$$

Comme  $\chi_{m_i}(x) = (x - \lambda_i) \chi_{B_i}(x)$  est scindé sur  $K$

$\Delta$  envoie dans  
le ROM



car  $m_i$  est trigonalisable, alors  $B_i$  est trigonalisable.

De plus, comme les  $m_i$  commutent 2 à 2, on a :  $A_i A_h = A_h A_i$  c.à.d. :

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_h & \lambda_i L_h + L_i P_h \\ 0 & B_i & B_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_h & \lambda_i & \lambda_h L_i + L_h B_i \\ 0 & B_h & B_i \end{pmatrix}$$

Donc les  $B_i$  commutent 2 à 2.

Alors par HR, il existe  $Q \in GL_m(K)$  tq  $B_i = Q \cdot T_i \cdot Q^{-1}$  (c.à.d.  $Q^{-1} \cdot B_i \cdot Q = T_i$ )

avec  $T_i$  triangulaire

On pose alors :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(K)$

Alors :

$$\begin{aligned} P^{-1} A_i P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i Q \\ 0 & Q^{-1} B_i Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i Q \\ 0 & T_i \end{pmatrix} \quad \forall_i \in I \end{aligned}$$

et ces matrices sont triangulaires.

Donc les endo  $m_i$  sont trigonalisables dans une même base.

### Remarques :

- La réciproque de la prop 4 n'est pas vraie car deux matrices triangulaires ne commutent pas forcément.

$$\text{ex : } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

PAN 104 • Exercice : Soit  $G$  un sous-groupe fini abélien de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Alors toutes les matrices de  $G$  sont ca-diagonalisables.



Correction: Les éléments de  $G$  sont diagonalisables (car si  $M \in G$  est d'ordre  $k$ , alors  $M^k = I_n$  donc  $X^k - 1$  s'annule sur  $M$  et est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ ) et commutent (car  $G$  est abélien).  
Donc ils sont bien co-diagonalisables.

- Exercice: Soit  $G$  sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{R})$  composé de matrices diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ .
- 1) Montrer que  $G$  est abélien.
  - 2) En déduire que  $\text{ord}(G) \leq 2^n$ .

Correction: 1) Soit  $A \in G$ . Alors il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tq  $A^m = I_n$  donc les  $\lambda_p$  de  $A$  sont les racines  $m$ -èmes de l'unité. Or  $A$  est diag sur  $\mathbb{R}$  donc appartenant à  $\{\pm 1\}$ . Donc  $A^2 = I_n$  car  $A$  est diag donc admet un poly annulateur scindé à racines simples.

Ainsi  $\forall A, B \in G$  :  $(AB)^2 = I_n$  donc  $ABAB = I_n$  donc  $BA = AB$ . Donc  $G$  est abélien.

- 2) Les matrices de  $G$  sont diagonalisables et commutent 2 à 2 car  $G$  est abélien, elles sont donc co-diagonalisables.

Ainsi  $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$  tq  $\forall M \in G$ ,  $P^{-1}MP$  est diagonale à coefficients diagonaux  $\pm 1$ .

Il y a alors  $2^n$  matrices diagonales possibles, donc  $\text{ord}(G) \leq 2^n$ .

MG 2024. Exercice: Soit  $m_1, \dots, m_n$  des endo nilpotents de  $\mathcal{L}(E)$  qui commutent, avec  $\dim(E) = n$ .  
Alors :  $m_1 \circ \dots \circ m_n = 0$



Correction: Comme ces endo sont nilpotents, ils sont trigonalisables (leur poly. caract. est  $x^n$  donc scindé). Comme ils commutent, on note  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  une base commune de trigonalisation. Dans cette base, comme leur spectre est réduit à  $\{0\}$ , leurs matrices sont triangulaires supérieures strictes.

On pose  $F_k = \text{vect} \{e_1, \dots, e_k\} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Alors on observe que :  $m_n(F_k) \subset F_{k-1}$

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall h \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Alors par récurrence :

$(m_1 \circ \dots \circ m_n)(F_n) \subset m_1(F_1) = \{0\}$ .

Or  $F_n = E$ .

Donc  $m_1 \circ \dots \circ m_n$  est l'endomorphisme nul.