

# Théorème de projection sur un convexe fermé

- Cours d'analyse fonctionnelle,  
Daniel Li, p 32

- Déf** : Une partie  $C$  d'un EV est dite convexe si le segment  $[x, y]$  est contenu dans  $C$  pour  $x, y \in C$  :
- si  $x, y \in C$  alors  $(1-\lambda)x + \lambda y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1]$
- Par exemple, tout SEV est convexe. Toute boule est convexe.

## Théorème de projection :

Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $C$  une partie convexe et fermée, non vide, de  $H$ .

Alors  $\forall x \in H$ , il existe un unique  $y \in C$  tel que :  $\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$

On dit que  $y = P_C(x)$  est la projection de  $x$  sur  $C$ .

Il est caractérisé par la prop :

$$y \in C \text{ et } \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0 \quad \forall z \in C \quad (*)$$

Dém :

### 1) Existence :

Soit  $d = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$

On remarque que si  $d = 0$ , alors  $x \in C$  car  $C$  est fermé, et alors  $y = x$  convient.

Par définition de  $d$ , pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $z_n \in C$  tel que

$$d^2 + \frac{1}{n} \geq \|x - z_n\|^2 \quad (\text{caractérisation de la borne inf})$$

Soit  $n, p \geq 1$ . On applique alors l'identité du parallélogramme à  $u = x - z_n$  et  $v = x - z_p$

Ainsi :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

$$\Rightarrow \|2x - z_n - z_p\|^2 + \|z_p - z_n\|^2 = 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2)$$

$$\Rightarrow 4\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\|^2 + \|z_n - z_p\|^2 = 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2)$$



On comme  $C$  est convexe,  $\frac{z_n + z_p}{2} \in C$  donc :

$$\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\| \geq d$$

Ainsi :

$$\|z_n - z_p\|^2 \leq 2\left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{p}\right) - 4d^2$$

$$\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{p}$$

Donc la suite  $(z_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $H$  qui est complet. Donc elle converge vers  $\gamma \in H$ .

On  $C$  est fermé et comme  $z_n \in C \forall n \geq 1$ , alors la limite aussi. Donc  $\gamma \in C$ .

En passant à la limite dans

$$\|x - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$$

on obtient que :  $\|x - \gamma\| \leq d$

(comme  $\gamma \in C$ ,  $\|x - \gamma\| = d = d(x, C)$ )

2) Unicité : Supposons qu'il existe  $\gamma_1, \gamma_2 \in C$  tel que  $\|x - \gamma_1\| = \|x - \gamma_2\| = d$ . Alors en appliquant de nouveau l'identité du parallélogramme :

$$4\left\|x - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right\|^2 + \|\gamma_1 - \gamma_2\|^2 = 2(\|x - \gamma_1\|^2 + \|x - \gamma_2\|^2) \\ = 2(d^2 + d^2)$$

$$\text{donc : } \|\gamma_1 - \gamma_2\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0$$

Donc  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

3) Preuve de (\*) :

• Soit  $z \in C$ , on a  $(1-t)\gamma + tz \in C \forall t \in [0, 1]$  car  $C$  est convexe. Ainsi :

$$\|x - ((1-t)\gamma + tz)\|^2 \geq \|x - \gamma\|^2$$

On développe  $\|x - \gamma + t(\gamma - z)\|^2$  et alors :

$$t^2 \|\gamma - z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\langle x - \gamma, \gamma - z \rangle) \geq 0$$



On prend  $t \neq 0$ , on divise par  $t$ , et on fait tendre vers 0 :

$$2 \operatorname{Re}(\langle x-y, y-z \rangle) \geq 0$$

$$\text{d'où : } \operatorname{Re}(\langle x-y, z-y \rangle) \leq 0$$

• Réciproquement, si  $y$  vérifie (\*), alors  $\forall z \in C$ :

$$\|x-z\|^2 = \|(x-y) + (y-z)\|^2$$

$$= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x-y, y-z \rangle)$$

$$\geq \|x-y\|^2 \quad \text{en majorant brutalement}$$

D'où par définition, comme  $y \in C$ ,  $y = P_C(x)$  par unicité.

Corollaire : L'application  $P_C : H \rightarrow C$  est

1-lipschitzienne donc continue:  $\forall x_1, x_2 \in H$ :

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Dém. on pose  $y_1 = P_C(x_1)$  et  $y_2 = P_C(x_2)$

D'après la condition (\*), on obtient :

$$\operatorname{Re}(\langle x_1 - y_1, z - y_1 \rangle) \leq 0 \quad \forall z \in C$$

$$\operatorname{Re}(\langle x_2 - y_2, z' - y_2 \rangle) \leq 0 \quad \forall z' \in C$$

On prend  $z = y_2$  et  $z' = y_1$

On additionne :

$$\operatorname{Re}(\langle (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2), y_2 - y_1 \rangle) \leq 0$$

D'où :

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \operatorname{Re}(\|y_2 - y_1\|^2)$$

$$= \operatorname{Re}(\langle (y_2 - x_2) + (x_2 - x_1) + (x_1 - y_1), y_2 - y_1 \rangle)$$

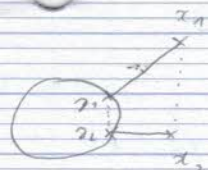
$$= \operatorname{Re}(\langle (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2), y_2 - y_1 \rangle) + \operatorname{Re}(\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle)$$

$$\leq \operatorname{Re}(\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle)$$

$$\leq |\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle|$$

$$\leq \|x_2 - x_1\| \cdot \|y_2 - y_1\| \quad \text{par Cauchy-Schwarz.}$$

Alors on divise par  $\|y_1 - y_2\|$  (qui est non

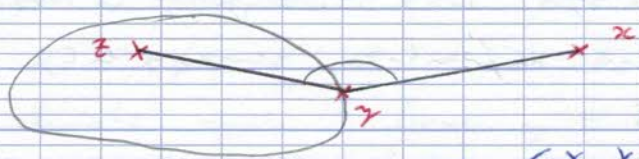




non nul (sinon le résultat est évident) et on obtient bien le résultat annoncé.

### Remarques:

- Dans le cas réel, la prop (\*) exprime que  $P_C(x)$  est l'unique point  $y$  de  $C$  tq  $\forall z \in C$ , l'angle des vecteurs  $x-y$  et  $z-y$  est obtus ( $\cos \theta \geq \frac{\pi}{2}$ ).



car

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \text{donc } \cos(\theta) \leq 0$$

- Le théorème reste vrai si  $H$  est juste préhilbertien et c'est  $C$  qui est complet. C'est par exemple le cas si  $C$  est contenu dans un SEV de dimension finie.
- Le théorème est fondamental, car sert par exemple pour montrer le théorème de représentation de Riesz, et pour montrer l'existence et l'unicité de l'adjoint.
- Si on projette sur  $F$  un SEV fermé de  $H$ , alors  $P_F: H \rightarrow F$  est linéaire continue. De plus,  $P_F(x)$  est l'unique point  $y \in F$  tel que  $x-y \in F^\perp$ . Et on a:  $H = F \oplus F^\perp$ .