

1 Développement asymptotique d'une suite récurrente

Théorème 1.1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Alors si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n v_k.$$

Démonstration. Dire que les suites à termes positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes équivaut à dire que pour tout réel $\epsilon \in]0, 1[$ il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, (1 - \epsilon)u_n \leq v_n \leq (1 + \epsilon)u_n. \quad (1.1)$$

Si la série de terme général u_n est divergente, des inégalité $v_n \geq (1 - \epsilon)u_n$ pour tout $n \geq n_0$ on a par comparaison que la série de terme général v_n est divergente.

En notant $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ les sommes partielles d'ordre n de ces séries, on a que $U_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_1 > n_0$ et :

$$\forall n > n_1, (1 - \epsilon)(U_n - U_{n_0-1}) \leq V_n - V_{n_0-1} \leq (1 + \epsilon)(U_n - U_{n_0-1}) \quad (1.2)$$

ce qui entraîne que, pour tout $n > n_1$, on a :

$$(1 - \epsilon)\left(1 - \frac{U_{n_0-1}}{U_n}\right) + \frac{V_{n_0-1}}{U_n} \leq \frac{V_n}{U_n} \leq (1 + \epsilon)\left(1 - \frac{U_{n_0-1}}{U_n}\right) + \frac{V_{n_0-1}}{U_n} \quad (1.3)$$

Avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{U_n} = 0$, (car (U_n) diverge) on en déduit alors qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, 1 - 2\epsilon \leq \frac{V_n}{U_n} \leq 1 + 2\epsilon \quad (1.4)$$

ce qui traduit l'équivalence de U_n et V_n quand n tend vers l'infini. $\square$

Application 1.1. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le développement asymptotique à l'ordre 2 de u_n est

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Démonstration. La suite (u_n) est croissante par définition de u_n et car l'exponentielle est positive. Si elle convergerait vers l , on aurait par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-u_n} = e^{-l} = 0$, ce qui est impossible. La suite (u_n) tend donc vers l'infini.

Posons, pour tout entier naturel n , $v_n = e^{u_n}$. On obtient,

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \frac{1}{v_n}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}.$$

La suite (v_n) est à termes strictement positifs, croît et diverge vers l'infini.

On cherche successivement les termes du développement asymptotique de la suite (v_n) . On part de

$$v_{n+1} = v_n \left(1 + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2v_n^2} + o\left(\frac{1}{v_n^2}\right)\right) = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$. Le théorème de Césaro nous donne que,

$$v_{n+1} - v_0 \sim_{n \rightarrow \infty} n \text{ et donc } v_n \sim_{n \rightarrow \infty} n.$$

Pour obtenir le deuxième terme du développement asymptotique de (v_n) on reprend l'expression de $v_{n+1} - v_n$ qui conduit à

$$v_{n+1} - v_n - 1 \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2v_n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n}.$$

En sommant de nouveau, on obtient (par le théorème précédent)

$$v_n - v_1 - n \sim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{2},$$

En effet, par comparaison série-intégrale avec $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^*$ donc

$$\text{Soit } k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx,$$

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx, \text{ (par la relation de Chasles)}$$

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n),$$

On en conclut en divisant par $\ln(n)$ et par le théorème d'encadrement que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)$, ce qui peut encore s'écrire $v_n = n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))$. On a alors

$$u_n = \ln(v_n) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

et finalement

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

□