# Endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ stabilisant le groupe linéaire :

**Thm :** Soit $\varphi$ un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$(*) \quad M \in GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \varphi(M) \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Montrer que $\varphi$ conserve le rang.

**dém :** Remarquons déjà que de tels $\varphi$ existent par exemple la transposition
on a $M \mapsto QMP$ si $Q, P \in GL_n(\mathbb{C})$.

**Lemme 1 :** Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.

Alors $M \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \varphi(M) \in GL_n(\mathbb{C})$

dém : $\Rightarrow$ : découle de $(*)$.

$\Leftarrow$ : par contraposée :
On suppose $r = rg(M) < n$ et $0$
Il existe alors $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = P\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$

$P^{-1}MQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est donc nilpotente

d'où $I_n - \lambda P^{-1}MQ^{-1}$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

donc $PQ - \lambda M$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ainsi $\varphi(PQ - \lambda M) \in GL_n(\mathbb{C})$

$= \varphi(PQ) - \lambda\varphi(M)$

d'où $I_n - \lambda\varphi(M)\varphi(PQ)^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Mais alors $\varphi(M)\varphi(PQ)^{-1}$ est nilpotente donc $\varphi(M)$ aussi.

En particulier $\varphi(M)$ est non inversible.

**Lemme 2 :** On a $rg(\varphi(M)) \geq rg(M)$ pour $M \in M_n(\mathbb{C})$.

Le résultat est vrai d'après $(*)$ si $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
On suppose donc $r = rg(M) < n$.
Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PJ_rQ$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$

On a alors $PDQ - \lambda M = P(D - \lambda J_r)Q$ est non inversible ssi $\lambda \in \{1, \dots, r\}$

donc $\varphi(PDQ) - \lambda \varphi(M)$ est non inversible par le lemme 1 pour exactement $r$ valeurs $\neq 0$ distinctes de $\lambda$.

Il en est de même de $I_n - \lambda\, \varphi(M)\, \varphi(PDQ)^{-1}$.

Ainsi $\varphi(M)\,\varphi(PDQ)^{-1}$ a exactement $r$ valeurs propres non nulles distinctes, donc est de rang $\geq r$

et alors $\underline{rg(\varphi(M)) \geq r = rg(M)}$.

<u>Fin de la preuve du théorème:</u>

D'après le lemme 2, $\varphi$ est injectif donc $\varphi$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Puis d'après le lemme 1, $\varphi^{-1}$ vérifie aussi $(*)$

et donc par le lemme 2 appliqué à $\varphi^{-1}$, on a

$rg(\varphi^{-1}(M)) \geq rg(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

d'où $rg(M) \geq rg(\varphi(M))$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Il s'ensuit que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\underline{rg(M) = rg(\varphi(M))}$.