235
236
239
245
261

Fonction caractéristique et moments de la loi Gamma

- L'oral à l'agreg, Isenmann et Pecatte, p 453
- Exercices de proba, Cottrell and co, p 121

<u>Déf</u> : On dit qu'une VA X suit la loi Gamma de paramètres $a>0$ et $\lambda>0$ si elle admet une densité de probabilité donnée par :

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

On la note : $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.

<u>Théorème</u> : La fonction caractéristique de $X \sim \Gamma(a,\lambda)$ est : $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

<u>Dém</u> : On utilise la méthode classique qui consiste à regarder la fonction à variable complexe $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(t) e^{zx}\,dx$ où f_X est la densité de X

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} ; Re(z) < \alpha\}$
Soit $z \in D_\lambda$ et $x>0$. On pose :

$$f(z,x) = x^{a-1} e^{-\lambda x} . e^{zx} = x^{a-1} . e^{(z-\lambda)x} = x^{a-1} e^{-(\lambda - z)x}$$

On a alors :

$$|f(z,x)| \leq x^{a-1} . e^{-(\lambda - Re(z))x} \qquad \forall z \in D_\lambda, \ \forall x > 0$$

Alors la fonction $x \mapsto x^{a-1} e^{-(\lambda - Re(z))x}$ est intégrable en 0 car équivalente à x^{a-1} en 0 qui est intégrable sur $]0;1]$ d'après les intégrales de Riemann ($a-1>-1$)
Et cette fonction est un $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ car $\lambda - Re(z) > 0$ donc l'expo l'emporte sur x^2 et va tendre vers 0. Elle est donc intégrable sur $[1;+\infty[$.

Donc à $z \in D_\lambda$ fixé, $x \mapsto f(z,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc définir :

$$\varphi : D_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{zx}\,dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} f(z,x)\,dx$$

On va calculer cette fonction sur D_λ, puis on évaluera en $z = it \in D_\lambda$.

On montre que ℓ est holomorphe sur D_λ.

Soit $\alpha \in]0; \lambda[$ (pour avoir une majoration intégrable)

- pour tout $z \in D_\alpha$, $x \mapsto f(z, x)$ est mesurable car continue
- pour tout $x > 0$, $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur D_α
- On a $\forall z \in D_\alpha$, $\forall x > 0$:

$$|f(z, x)| \leq x^{a-1} e^{-(\lambda - Re(z))x}$$
$$\leq x^{a-1} e^{-(\lambda - \alpha)x}$$

et cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lambda - \alpha > 0$.

D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, la fct ℓ est holomorphe sur l'ouvert D_α $\forall \alpha \in]0; \lambda[$. Comme l'holomorphie est une propriété locale, alors ℓ est holomorphe sur $\bigcup_{0<\alpha<\lambda} D_\alpha = D_\lambda$

On regarde maintenant ℓ dans les réels.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tq $t < \lambda$. Alors :

$$\ell(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-(\lambda - t)x} \, dx$$

$y = (\lambda - t)x$

$x = \frac{y}{\lambda - t}$

$dx = \frac{1}{\lambda - t} dy$

cela reste $+\infty$ car $\lambda - t > 0$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda - t}\right)^{a-1} e^{-y} \frac{1}{\lambda - t} \, dy$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} \, dy$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a \frac{1}{\Gamma(a)} \Gamma(a) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a$$

Or la fonction $h : z \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^a$ est holomorphe sur D_λ

(car $h(z) = \lambda^a . e^{-a\log(\lambda - z)}$ en utilisant la détermination principale du log complexe)

Donc φ et h coïncident sur la demi-droite $]-\infty ; \lambda[$ donc d'après le théorème des zéros isolés, elles coïncident sur D_λ (car $h - \varphi$ est holomorphe et n'a pas que des zéros isolés donc $h - \varphi = 0$)

Donc $\forall z \in D_\lambda$: $\varphi(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^a$

En particulier pour $z = it$ avec $t \in \mathbb{R}$, $z \in D_\lambda$ et donc :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \varphi(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a.$$

Théorème : $\forall n \geq 0$, la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet un moment d'ordre n dont la valeur est :

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{\lambda^n}$$

Dém : Comme vu précédemment, φ est holomorphe en 0 donc Φ_X est infiniment dérivable en 0.

Alors par théorème, X admet des moments de tout ordre et on a :

$$\Phi_X^{(n)}(t) = i^n . \mathbb{E}[X^n e^{itX}]$$

donc $\mathbb{E}[X^n] = i^{-n} \Phi_X^{(n)}(0)$

On montre par récurrence sur n que :

$$\Phi_X^{(n)}(t) = \lambda^a i^n a(a+1)\dots(a+n-1) \frac{1}{(\lambda - it)^{a+n}}$$

- pour $n = 0$: $\Phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$ OK

- Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_X^{(n+1)}(t) = (\Phi_X^{(n)})'(t)$$
$$= \lambda^a i^n a(a+1)\dots(a+n-1)\left((-i)(-a-n)(\lambda - it)^{-a-n-1}\right)$$

$$= \lambda^a i^{n+1} a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)(\lambda - it)^{-a-(n+1)}$$

Donc l'assertion est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{\cancel{i^n}} \lambda^a \cancel{i^n} a(a+1)\dots(a+n-1)\lambda^{-a-n}$$

$$= \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{\lambda^n}$$

On trouve bien par exemple que :

$\mathbb{E}[X] = \dfrac{a}{\lambda}$ et $\mathbb{E}[X^2] = \dfrac{a(a+1)}{\lambda^2}$ donc $Var(X) = \dfrac{a}{\lambda^2}$

Remarques :

- En utilisant les fonctions caractéristiques, on observe que si $X \sim \Gamma(a_1, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(a_2, \lambda)$ avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim \Gamma(a_1 + a_2, \lambda)$
- On observe avec les densités que : $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$
  Donc la somme de n VA $\mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$
- On observe que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ avec les fct tests.
  Donc la loi du khi-deux $\chi^2(n)$ qui est la loi de : $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ où (X_i) IID $\mathcal{N}(0,1)$ est telle que : $\chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}; \frac{1}{2})$
- On a utilisé le :
  Principe des zéros isolés : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans U, non identiquement nulle. Si a est un zéro de f, il existe un voisinage de a dans lequel f n'admet pas d'autres zéros. Autrement dit, les zéros de f sont isolés.