106
149
204

$GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert et connexe dans $M_n(\mathbb{C})$

- Carnet de voyage en Algèbre, Caldero - Peronnier p 143

CAL

Prop 1 : Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $GL_n(K)$ est ouvert dans $M_n(K)$.

Dém : On rappelle que $GL_n(K)$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$. On a :
$GL_n(K) = \{ A \in M_n(K) \ ; \ \det(A) \neq 0 \}$
On a la formule du déterminant :

$$\det : M_n(K) \to K$$
$$A \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \times \dots \times a_{\sigma(n)n}$$

Cette application est polynômiale en les coefficients de A, donc est continue.
On : $GL_n(K) = \det^{-1}(K^*)$
Comme K^* est ouvert, $GL_n(K)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une appli continue, donc est ouvert.
Rem : ici cela marche aussi dans $\mathbb{R}$

Prop 2 : Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.

Dém : Soit $A \in M_n(K)$. On montre qu'il existe une suite $(A_k)_k$ de matrices de $GL_n(K)$ qui CV vers A.

- Si A inversible, la suite constante $A_k = A$ $\forall k \in \mathbb{N}$ convient.
- Si A n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre de A.
  On regarde alors la suite $\left(A - \frac{1}{k} I_n\right)_{k \geq 1}$ et on regarde à partir de quel rang c'est une suite

de $GL_n(K)$.
On regarde l'ensemble $Sp(A) \setminus \{0\}$. Il est fini (car ce sont les racines de χ_A qui est de degré n) et éventuellement vide.
S'il est vide, alors 0 est l'unique vp de A donc $\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k}$ n'est pas vp de A.
S'il est non vide, il possède un élément minimal m non nul (au sens du module) et alors pour tout entier $s > \frac{1}{|m|}$, on a que $\frac{1}{s}$ n'est pas valeur propre de A.

Ainsi pour tout $k \geq s$, $A - \frac{1}{k} I_n \in GL_n(K)$ (car sinon $\det(A - \frac{1}{k} I_n) = 0 \iff \chi_A(\frac{1}{k}) = 0 \iff \frac{1}{k}$ est valeur propre de A)
Donc on a bien une suite de $GL_n(K)$, et celle-ci tend vers A, par exemple pour la norme Sup :

$$\| A - (A - \frac{1}{k} I_n) \|_\infty = \| \frac{1}{k} I_n \|_\infty$$

$$= \frac{1}{k} \left(\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |I_{ij}| \right) = \frac{1}{k} \times 1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Rem : ici cela marche aussi dans $\mathbb{R}$

⚠ Ne marche pas dans $\mathbb{R}$

Prop 3 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc connexe.

Dém : Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. On cherche un chemin qui relie A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$.

On regarde l'appli :

$$P : [0;1] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \det((1-t)A + tB)$$

prendre la 2e édition du livre, car la première a trop de coquilles

On le det est polynômiale en les coeffs de A, donc P est polynômiale en t.

On $P(0) = \det(A) \neq 0$ car $A \in GL_n(\mathbb{C})$

Donc la fonction polynômiale P n'est pas nulle.

Ainsi le polynôme P associé est non nul.

Comme P est non nul, il possède un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$.

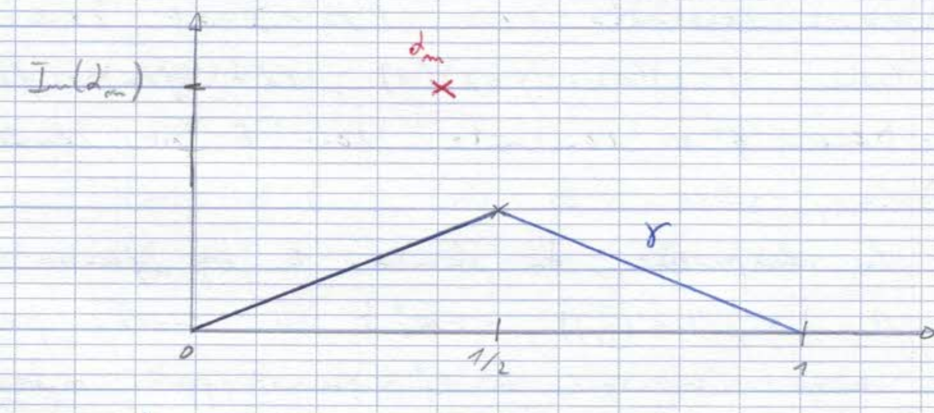
On va alors tracer dans $\mathbb{C}$ un chemin γ reliant 0 à 1 qui évite les zéros de P.

Soit α_m la racine de P tq sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(\alpha_m)$ soit la plus minimale positive non nulle, ce qui est possible par finitude des racines de P.

Si P n'a que des racines réelles ou de partie imaginaire négative, on prend $\alpha_m = i$).

On définit alors :

$$\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \begin{cases} t + it\,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [0;\frac{1}{2}] \\ t + i(1-t)\,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [\frac{1}{2};1] \end{cases}$$



On a bien que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$

Or $t=0$ et $t=1$ n'annulent pas P car $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$

et $\forall t \in]0;1[$, $\gamma(t)$ ne peut pas être racine de P puisque : $0 < \mathrm{Im}(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha_m) < \mathrm{Im}(\alpha_m)$

On pose alors :

$$\alpha : [0;1] \to GL_n(\mathbb{C})$$
$$t \mapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B$$

On a bien $\alpha(0) = A$ et $\alpha(1) = B$.
Cette appli est continue car γ est continue, et est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ puisque l'on a pris soin que $\det(\alpha(t)) = P(\gamma(t))$ ne s'annule pas.
On a donc construit un arc reliant A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$.
Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est CPA, donc connexe.

Remarques :

GOU • Lemme 1 : Un espace connexe par arcs est connexe.
Dém : Soit E CPA. Soit $f : E \to \{0;1\}$ une application continue. On mq f est constante.
Soit $a, b \in E$. Alors il existe un chemin continu $\gamma : [0;1] \to E$ tq $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors l'appli $f \circ \gamma : [0;1] \to \{0;1\}$ est continue donc constante car $[0;1]$ est connexe.
Donc : $(f\circ\gamma)(0) = (f\circ\gamma)(1)$, càd $f(a) = f(b)$.
Donc f est constante, donc E est connexe.

• La réciproque du lemme 1 est fausse : l'ensemble $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) ; x \in \mathbb{R}_+^*\}$ est connexe par arcs comme image de $\mathbb{R}_+^*$ par l'appli $x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$.
Mais $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\}$ est connexe (car A l'est) mais n'est pas CPA : $\bar{A}$ est appelé "courbe du sinus du topologue".

• Prop 4 : Soit E un EVN et Ω un ouvert connexe de E. Alors Ω est CPA dans E.

- Prop 5 : L'image d'un connexe (par arcs) par une appli continue est connexe (par arcs)

Dém :

- CPA : Soit A CPA. On mq $f(A)$ est CPA.
  Soit $f(a)$ et $f(b)$ dans $f(A)$. Alors $a, b \in A$ donc il existe $\gamma : [0;1] \to A$ qui connecte a et b. Alors $f \circ \gamma$ est un chemin qui connecte $f(a)$ et $f(b)$ dans $f(A)$.
- Connexe : Soit A connexe. Mq $f(A)$ est connexe. On suppose que $f(A) = U \sqcup V$ union disjointe de deux ouverts de $f(A)$.
  Alors $A = \left(f^{-1}(U) \cap A\right) \sqcup \left(f^{-1}(V) \cap A\right)$ est décomposé en l'union disjointe de deux ouverts de A.
  Donc, par ex, $f^{-1}(U) \cap A = \emptyset$. Mais alors $\forall a \in A$, $f(a) \notin U$, donc $U = \emptyset$. Donc $f(A)$ connexe.

⚠ • $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. En effet, si c'était le cas, comme det est continu, alors $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ serait connexe. Or $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\sqcup]0; +\infty[$ qui est non connexe. Contradiction.

- En fait $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs : $GL_n(\mathbb{R})^+ = \{A \in M_n(\mathbb{R}) ; \det(A) > 0\}$ et $GL_n(\mathbb{R})^-$

- Application de la densité : $\forall A, B \in M_n(K)$, on a :
  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
  En effet, si $A \in GL_n(K)$ alors :
  $\chi_{AB} = \det(AB - XI_n)$

$= \det\left(A^{-1}(AB - X I_n) A\right)$ car $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$= \det\left((B - X A^{-1}) A\right)$

$= \det(BA - X I_n)$

$= \chi_{BA}$

Et on généralise à $M_n(K)$ en utilisant la densité de $GL_n(K)$, et car l'appli $M \mapsto \chi_M$ est continue (car polynômiale en les coefs de M ??)

- Prop 6 : A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$: A inversible $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n$

$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Leftarrow$: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ les colonnes forment une base de K^n

$\Rightarrow A$ matrice de passage de la base canonique à une nouvelle base

$\Rightarrow A$ inversible