

$$\text{Non } \exp(\text{RP}(n)) \in S_n \rightarrow S_n^{++}$$

Théorème: $\exp: S_n \rightarrow S_n^{++}$ est un homéomorphisme.

Preuve:

• $\exp(S_n) \subseteq S_n^{++}$: si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exp A \in S_n(\mathbb{R})$. De plus, A est diagonalisable:

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq. $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_i)$. Donc,

$$P^{-1} \exp(A) P = \text{diag}(\exp(\lambda_i))$$

Donc $\text{Sp}(\exp(A)) \subseteq (\mathbb{R}^+)^*$, donc $\exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

• Surjectivité: soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, on écrit:

$$B = P \cdot \text{diag}(\lambda_i)^t P,$$

$P \in O_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (\mathbb{R}^+)^*$. Alors, $B = \exp A$ avec $A = P \cdot \text{diag}(\ln \lambda_i)^t P \in S_n(\mathbb{R})$.

• Injectivité: soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tq. $\exp A = \exp A'$. On pose $\text{Sp} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Soit Q un polynôme tq. $\forall i=1, \dots, n$, $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ (interpolation de Lagrange par exemple). Par le thm spectral, on pose $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq. $A = P \cdot \text{diag}(\lambda_i)^t P$. Alors,

$$\begin{aligned} Q(\exp A') &= Q(\exp A) \\ &= Q(P \cdot \text{diag}(e^{\lambda_i})^t P) \\ &= P Q(\text{diag}(e^{\lambda_i}))^t P \\ &= P \cdot \text{diag}(\lambda_i)^t P = A. \end{aligned}$$

Donc, A et $\exp(A')$ commutent, donc A et A' aussi, et par diagonalisation simultanée,

$\exists R \in O_n(\mathbb{R})$, $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$ tq.:

$$\begin{cases} A = R \text{diag}(\lambda_i)^t R \\ A' = R \text{diag}(\mu_i)^t R \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \exp(A) = R \text{diag}(e^{\lambda_i})^t R \\ \exp(A') = R \text{diag}(e^{\mu_i})^t R \end{cases}$$

donc, $\lambda_i = \mu_i \quad \forall i=1, \dots, n$ et $A = A'$.

• Bicontinuité. $\exp: S_n \rightarrow S_n^{++}$ est continue, car la série définissant $\exp$ est une série d'applications continues normalement convergente.

Lemme: $\forall r \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\|r\|_2 = \rho(r)$

On dispose d'une BON de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour r par le thm spectral. On la note $(e_1, \dots, e_n)$. Alors, $\forall i=1, \dots, n$, $re_i = d_i e_i$, $d_i > 0$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, avec $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$. On a: par Pythagore

$$\|rx\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i d_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 d_i^2 \leq \rho(r)^2.$$

[Or, pour $x = e_i$, avec $i=1, \dots, n$ tq. $d_i = \rho(r)$, on a $\|rx\|_2^2 = \rho(r)^2$. Donc $\rho(r) = \|rx\|_2$.] Soit $(B_p)_{p \geq 0} = (\exp A_p)_{p \geq 0} \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $B_p \rightarrow B = \exp A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On veut mq. $A_p \rightarrow A$

$(B)_p$ bornée, donc elle est bornée pour $\|\cdot\|_2$. Par le lemme, le spectre de $(B)_p$ est borné, majoré par $C > 0$. De même par $(B^{-1})_p$ qui va vers B^{-1} , on trouve une constante C' qui minore $\text{Sp}(B)$.
 Donc $\text{Sp}(B_p) \subseteq [C', C] \subseteq]0, \infty[\quad \forall p \geq 0$. Donc
 $\text{Sp}(A_p) \subseteq [\ln C', \ln C] \quad \forall p \geq 0$.

$(A_p)_p$ est donc bornée pour $\|\cdot\|_2$. Soit $\bar{A}$ valeur d'adhérence de $(A_p)_p$, et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une extraite lq. $A_{q_n} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \bar{A}$. Alors, $\exp \bar{A} = \lim_{p \rightarrow \infty} \exp A_{q_n} = B = \exp A$, donc $A = \bar{A}$ par injectivité. $(A_p)_p$ est bornée et n'a pas A comme valeur d'adhérence, d'où, $A_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} A$, et $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est bicontinue.

Remarques:

- ▷ Développement un peu long pour moi, je ne montrais pas le lemme à l'oral. La preuve ressemble beaucoup à la preuve de la décomposition polaire (sauf la fin qui est un peu plus longue ici). J'avais les deux d'ors, celui-ci me m'a donc pas demandé beaucoup de temps à apprendre :)
- ▷ Attention quand même à savoir montrer que $\exp$ est continue avec la série.