

Théorème: Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie E . Alors:

(i) u est diagonalisable si et seulement si $\exp(u)$ l'est.

(ii) $\exp(u) = \text{Id}$ si et seulement si u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) \subseteq 2\pi\mathbb{Z}$.

Preuve:

Soit u un endomorphisme de E . Alors, la décomposition de Dunford de u existe. on note:

$$u = d + n$$

avec d diagonalisable, n nilpotent et d et n commutent.

On cherche la décomposition de Dunford de $\exp(u)$. on a d'abord:

$$\exp(u) = \exp(d+n) = \exp(d) \circ \exp(n) \quad (\text{commutativité de } d \text{ et } n)$$

Notons $p \geq 1$ l'indice de nilpotence de n . Alors:

$$\exp(n) = \text{Id} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^k}{k!} \doteq \text{Id} + \bar{n}.$$

Ainsi, on a:

$$\exp(u) = \exp(d) + \exp(d) \circ \bar{n} \quad (*)$$

or,

1) $\exp(d)$ est diagonalisable: soit $\phi \in GL_n(\mathbb{C})$ tq. $\Delta = \phi^{-1} d \phi$ est diagonale, alors,

$$\exp(d) = \phi \exp(\Delta) \phi^{-1} \text{ donc, } \exp(d) \text{ est diagonalisable.}$$

2) Comme d et n commutent, on déduit que tout polynôme en n commute à d , donc, $\exp(n)$ aussi. Donc tout polynôme ~~commute~~ en d commute à $\exp(n)$, donc, en passant à la limite, $\exp(d)$ et $\exp(n)$ commutent, donc $\exp(d)$ et $\bar{n}$ aussi.

3) Par le point 2), on a $\forall k \geq 1, (\exp(d) \circ \bar{n})^k = \exp(d)^k \circ \bar{n}^k$. Comme $\bar{n}$ est nilpotente, en tant que somme finie de nilpotents commutant entre eux, $\exp(d) \circ \bar{n}$ est nilpotente. Donc, la formule (*) donne la décomposition de Dunford de $\exp(u)$.

Passons à la preuve du thm:

(i) La preuve du lemme a montré l'implication directe.

On montre la réciproque. Supposons $\exp(u)$ diagonalisable. Alors, $\exp(u) = \exp(u) + 0$ est sa décomposition de Dunford donc par ce qui précède, $\exp(d) \circ \bar{n} = 0$ donc, $\bar{n} = 0$ car $\exp(d)$ est inversible. Donc, $\exp(n) = \text{Id}$. Posons p l'indice de nilpotence de n . Si $p \geq 2$, on

$$\text{Id} = \exp(n) = \text{Id} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^k}{k!}$$

$$\text{Donc, } 0 = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^k}{k!}.$$

Donc, $P(X) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^k}{k!}$ serait annulateur: contradiction car X^p est minimal pour n . Donc $p=1$ et $n=0$.

Donc, $u=d$ et u est diagonalisable.

(ii) L'implication réciproque est directe.

On montre l'implication directe. Si $\exp(u) = Id$, alors, u est diagonalisable par (i).

Donc, il existe δ diagonal et $\phi \in GL_n(\mathbb{C})$ q.

$$u = \phi \delta \phi^{-1}$$

Alors,

$$\exp(u) = \phi \exp(\delta) \phi^{-1}$$

Donc,

$$\exp(\delta) = I_n \text{ par hypothèse}$$

Donc $\exists$ si $\lambda \in \text{Sp}(\delta)$, alors, $e^\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Remarques:

- ▷ Développement classique, et pas d'un niveau microbolant. Le développement peut tenir tout le temps nécessaire si vous prenez votre temps, c'était mon cas. Après, il y a plein de choses à dire en supplément si vous voulez le rallonger.
- ▷ Décomposition de Dunford à maîtriser, et faire quand même attention aux arguments où se cache la continuité du produit matriciel ou continuité de l'exponentielle.