ENDOMORPHISMES SEMI-SIMPLE.

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim finie. On a que $f \in L(E)$ est semi-simple ssi son polynôme minimal n'a pas de facteur carré.

Preuve:

Soit F un sev stable par F. On note μ le polynôme minimal de f. Par le lemme des noyaux en notant $\mu = \pi_1^{\alpha_1} \dots \pi_r^{\alpha_r}$, $\pi_1, \dots, \pi_r$ premiers entre eux, on a:

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\ker \pi_i^{\alpha_i}(f) \cap F\right) \quad \text{car } \ker \pi_i^{d_i}(f_{|F}) = \ker \pi_i^{d_i}(f) \cap F.$$

($\Leftarrow$) Supposons d'abord μ irréductible. On pose $L = \frac{\mathbb{K}[X]}{\langle \mu \rangle}$. Comme μ est irréductible, L est un corps (en fait, c'est le corps de rupture de μ). On munit alors E d'une structure de L-ev : $\begin{array}{l} L \times E \longrightarrow E \\ (P, x) \longmapsto P(f)(x) \end{array}$. [Soit F un $\mathbb{K}$ sev de E stable par f, alors F est un L sous ev de E (car si $x \in F$, $P \in L$, $P.x = P(f)(x) \in F$). Réciproquement, si G est un L sous ev de E, alors, soit $x \in G$, on a $f(x) \in G$ (prendre $P = X$), donc G est un $\mathbb{K}$-sous ev de E stable par f]. Prenons alors F un espace stable par f. C'est donc un L sous ev de E, dont on peut prendre un supplémentaire G, qui se trouve donc être un $\mathbb{K}$ sous-ev de E stable par f, et on a bien $E = F \oplus G$. f est semi-simple.

Posons maintenant $\mu = \prod_{i=1}^{r} \pi_i$, avec les π_i deux à deux distincts et irréductibles. On note $E_i := \ker \pi_i(f)$ et on pose $f_i = f_{|E_i}$. Alors, π_i annule f_i et est irréductible, donc π_i est le polynôme minimal de f_i. Par ce qui précède, f_i est donc semi simple. Soit alors F un sev de E stable par f. On a (par le début)

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} (E_i \cap F).$$

et $E_i \cap F$ est stable par f_i. Soit S_i un supplémentaire de $E_i \cap F$ dans E_i stable par f_i, et $S = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$. Alors, S est stable par f, et (lemme des noyaux):

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i = \bigoplus_{i=1}^{r} (E_i \cap F) \oplus S_i = F \oplus S.$$

($\Rightarrow$) Supposons f semi-simple, et que il existe $\alpha_i \geq 2$. Écrivons alors $\mu = \pi^2 N$ avec π irréductible. Soit ~~$F = \pi(f)$~~ $F := \ker \pi(f)$. F est f-stable et a donc un supplémentaire f-stable, noté S.

* Si $x \in S$, alors $\pi N(f)(x) \in F$ car $\pi(f)(\pi N(f)(x)) = 0$ et $\pi N(f)(x) \in S$ car S est f-stable donc, $\pi N(f)(x) \in F \cap S = \{0\}$.
* Si $x \in F$, alors, $\pi N(f)(x) = N(\pi(f)(x)) = 0$.

Donc $\pi N(f) \equiv 0$ sur E, contradiction avec la minimalité de μ.

Remarques:

▷ Développement que j'ai adoré! L'argument où l'on change le produit de l'espace vectoriel E est quand même inhabituel et rudement joli! En tout cas beaucoup plus joli à mon avis que ce que fait le Gourdon pour montrer le thm dans le cas où μ est irréductible. A part cela, le reste découle.

▷ Ce thm permet de montrer en deux coups de cuillère à pot que dans $\mathbb{K}$ alg. clos, un endomorphisme est semi-simple ssi il est diagonalisable.
On a deux autres applications: la décomposition de Dunford généralisée (cf. BMP) et (mention spéciale pour ceux qui prennent le dev "topologie des classes de similitude :)) on peut montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-simple ssi sa classe de similitude est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ceci dit, il faut se renseigner sur la preuve.