DECOMPOSITION POLAIRE

Théorème: Soit $n \geq 1$, l'application suivante est un homéomorphisme:

$$\phi : S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$(O, S) \longmapsto OS$$

Preuve:

ϕ surjective (existence de la décomposition polaire)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Considérons la matrice $\Delta = A \cdot {}^tA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

D'une part, par le théorème spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tq.

$$ {}^tP \Delta P = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ tq. } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0.$$

Posons alors $\Gamma := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$ et $S = {}^tP \Gamma P$ de sorte que $S^2 = PD\,{}^tP = \Delta = A \cdot {}^tA$. et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Posons alors $O = S^{-1}A$, on montre que $O \in O_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} O \cdot {}^tO &= S^{-1}A\,{}^t(S^{-1}A) \\ &= S^{-1}A\,{}^tA\,{}^tS^{-1} \\ &= S^{-1}S^2S^{-1} = I_d \end{aligned}$$

Donc $O \in O_n(\mathbb{R})$ et ϕ est surjective.

ϕ injective (unicité de la décomposition polaire)

Supposons que $(O,S), (O',S') \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont deux décompositions polaires, alors d'une part, $S^2 = A \cdot {}^tA = S'O' \cdot {}^tO'\,{}^tS' = S'^2$. D'autre part, en prenant un polynôme R interpolateur de Lagrange aux points $(\lambda_i, \sqrt{\lambda_i})$, on remarque que $\Gamma = R(D)$. Alors,

$$S = {}^tP \Gamma P = {}^tP R(D) P = R({}^tPDP) = R(S^2) = R(S'^2)$$

Donc, S est un polynôme en S' et donc S et S' commutent. En combinant ceci avec le thm spectral, on trouve que S et S' sont codiagonalisables donc que l'on peut trouver une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq.

$$\begin{aligned} P^{-1}SP &= \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ P^{-1}S'P &= \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \end{aligned}$$

avec les $(\lambda_i)_i$ et $(\mu_i)_i$ strictement positifs, les valeurs propres de S et S' respectivement.
Comme $S^2 = S'^2$, il vient que $\forall i = 1, \dots, n$, $\lambda_i^2 = \mu_i^2$ donc $\mu_i = \lambda_i$. Donc $S = S'$.
Comme $S, S' \in GL_n(\mathbb{R})$, il suit immédiatement que $O = O'$.

ϕ est un homéomorphisme

→ ϕ est continue par continuité du produit matriciel.

→ On mq. ϕ^{-1} est continue par critère séquentiel. Soit $(A_k)_k \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tq. $A_k \to A$. Soit $(O_k, S_k)_k \subseteq O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq. $A_k = O_kS_k$ et $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq. $A = OS$. On veut mq. $O_k \to O$ et $S_k \to S$.
Par compacité de $O_n(\mathbb{R})$, on peut trouver φ une extraction et $\bar{O} \in O_n(\mathbb{R})$ tq.

$$O_{\varphi(n)} \longrightarrow \bar{O}$$

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$S_{\varphi(k)} = {}^tO_{\varphi(k)} A_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} {}^t\bar{O}A \text{ (continuité des transpositions)}$$

Or, $S_{\varphi(k)} \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subseteq S_n^+(\mathbb{R})$ qui est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t\bar{O}A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et est manifestement inversible en tant que produit de matrices inversibles. Donc,

$$^t\bar{O}A \in S_n^+(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Par unicité de la décomposition polaire de A, $A = \bar{O}S$ donne $\bar{O} = O$. Donc $\bar{O}$ est la seule valeur d'adhérence de $(O_k)_k$ qui est une suite dans un compact, donc, $O_k \longrightarrow O$. Enfin, $\forall k \geq 0$, $S_k = {}^tO_k A_k \longrightarrow {}^tOA = S$, d'où le résultat.

Remarques :

▷ Développement sympathique, qui passe largement dans les temps une fois bien maîtrisé.

▷ Les applications sont nombreuses, pour une fois, il faut en profiter : calcul de $|||A|||_2$ pour une matrice inversible par exemple : ne pas hésiter à mettre légion d'applications dans la leçon.

▷ Plusieurs choses à bien maîtriser : compacité de $O_n(\mathbb{R})$, $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, codiagonalisabilité, thm spectral.

⇒ On utilise une notion de convergence de suites de matrices : se préparer à la question de la topologie que l'on met sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (Spoiler : on s'en fiche puisqu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).