

203
206
208

Equivalence des normes en dimension finie et théorème de Heine

- L'end & l'algèbre, Isenmann et Pecatte, p 422
- Analyse, Bourbaki, p 51

IP 422 Def 1: Deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ d'un $\mathbb{R}$ -ev E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tq $\forall x \in E$:

$$\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2$$

Def 2: Soit $K \subset E$ un espace métrique. On dit que K est compact si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Prop 3: Soit E un EVN et $x \in E$. Alors x est un compact de E ssi toute suite de x admet une valeur d'adhérence dans x .

Théorème 4: Les compacts de $\mathbb{R}^n$ pour la norme infinie sont les fermés bornés.

IP 424 Théorème 5: Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

600 Preuve: Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

51 Soit N une norme sur E .

IP 424 On va montrer que N est équivalente à la norme infinie N_0 associée à la base β (N_0 dépend du choix de β). On a que :

$$N_0(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

où les (x_i) sont les coordonnées de x dans la base β : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Soit $x \in E$. Par $\pm$ et homogénéité de N on a :

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n N(e_i)\right) \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \beta \cdot N_0(x)$$

où $\beta = \sum_{i=1}^n N(e_i) > 0$ car $N(e_i) > 0 \forall i$

On pose $S_E^\infty = \{x \in E; N_0(x) = 1\}$ et on veut montrer que S_E^∞ est un compact de (E, N_0)

On en a un isomorphisme d'EVN :

$$\varphi: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, N_0)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Alors φ est une isométrie car φ est linéaire et

$$N_0(\varphi(x)) = N_0\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|x\|_\infty$$

En particulier, φ est continue.

Comme φ est bijective, $\varphi(S_n^\infty) = S_E^\infty$

$$\text{où } S_n^\infty = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_\infty = 1\}$$

On sait que S_n^∞ est un compact de $\mathbb{R}^n$, d'après le théorème 4 (un fermé-borné).

Donc S_E^∞ est un compact de (E, N_0) comme image d'un compact par une application continue.

On montre maintenant la deuxième égalité.

D'après la première inégalité, l'application

$$N: (E, N_0) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \quad \text{est continue car}$$

$$x \mapsto N(x) \quad \beta\text{-lipschitienne.}$$

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \quad \text{par IT inverse}$$

$$\leq \beta \cdot N_0(x-y)$$

Ainsi d'après le théorème des bornes atteintes, N atteint ses bornes sur S_E^∞ :

le lemme 7 se prouve grâce au théorème de projection sur un convexe fermé (ici un SEV fermé).

$$\exists x_0 \in S_E^{\circ} \text{ tq } \inf_{x \in S_E^{\circ}} N(x) = N(x_0) := d$$

Comme $x_0 \in S_E^{\circ}$, $N_0(x_0) = 1 > 0$ donc $x_0 \neq 0$ donc $d = N(x_0) > 0$.

$$\text{On a } N(x) \geq d \quad \forall x \in S_E^{\circ}$$

Soit $x \in E$ non nul. Alors $\frac{x}{N_0(x)} \in S_E^{\circ}$ et alors

$$N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right) \geq d. \text{ D'où par homogénéité:}$$

$$N(x) \geq d \cdot N_0(x).$$

Cela est aussi vrai pour $x = 0$.

Donc N et N_0 sont équivalentes, donc par transitivité toutes les normes sont équivalentes. $\square$

Li Avec ce théorème, on a montré que:

- 16
- Tout EVN de dim finie n est isomorphe à K^n
 - Si E est un EVN de dim finie, ses parties fermées-bornées sont compactes.
 - Tout EVN de dim finie est complet
 - Tout SEV de dim finie d'un EVN est fermé
 - Toute appli linéaire d'un EVN de dim finie dans un EVN quelconque est continue.

IP Lemme 6: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -EVN et F un SEV de dim finie de E . Soit $z \in E \setminus F$. Alors $d(z, F) > 0$ et il existe $x_0 \in F$ tel que $d(z, F) = \|z - x_0\|$.

10
425

Théorème de Heine: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -E.V.N. Alors
 E est de dimension finie ssi $\overline{B_E} = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$,
 sa boule unité fermée, est compacte.

~~Dém. $\Rightarrow$: Si E est de dimension finie, on peut
 alors faire comme dans la preuve précédente et
 utiliser f pour montrer que
 On a que $f^{-1}(\overline{B_E})$ est fermé (car f continue)
 et est borné.~~

Dém. $\Rightarrow$: Si E est de dimension finie, comme
 $\overline{B_E}$ est fermé-borné, elle est compacte par
 un corollaire.

$\Leftarrow$: Soit E de dimension finie. On suppose par
 l'absurde que $\overline{B_E}$ est compact.

Comme $\overline{B_E} \subset \bigcup_{x \in E} B(x, 1)$, par définition d'un
 compact, il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tel que
 $\overline{B_E} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$

On pose $F = \text{vect}\{x_1, \dots, x_n\}$

Comme F est un S.E.V. de dim finie de E ,
 qui lui est de dim infinie, il existe
 $\gamma \in E \setminus F$.

Alors d'après le lemme 6, $d(\gamma, F) > 0$ et il
 existe $z \in F$ tel que $\|\gamma - z\| = d(\gamma, F)$.

On pose $n = \frac{\gamma - z}{\|\gamma - z\|}$

Alors $\|n\| = 1$ donc $n \in \overline{B_E}$ et il existe
 i tq $n \in B(x_i, 1)$ donc $\|n - x_i\| < 1$.

On a:

Δ Dans le 10,
 ils prennent x_0
 pour z , mais
 x_0 est déjà un
 élément de F

$$\begin{aligned}\|y - x_n\| &= \frac{\|y - z - x_n\| \|y - z\|}{\|y - z\|} \\ &= \frac{\|y - (z + x_n)\| \|y - z\|}{\|y - z\|}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d(y, F)}{\|y - z\|} = 1 \quad (\text{car } z + x_n \|y - z\| \in F)$$

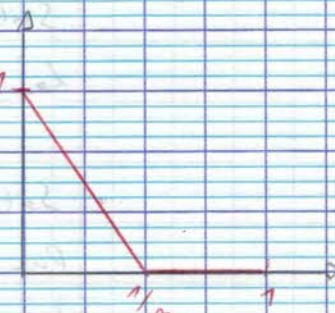
Contradiction. Donc $\overline{B_E}$ n'est pas compact. $\square$

Remarques

IP 426 • En dim infinie, il n'y a pas équivalence des normes.
On prend par exemple $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ avec les normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.
Alors on regarde la suite de fonctions

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \max(1 - nx, 0)$$



Alors les f_n sont continues.

$$\text{On a : } \|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1$$

Alors s'il existait $p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\|f_n\|_\infty \leq p \cdot \|f_n\|_1 \quad \text{on aurait} \quad 1 \leq p \cdot \frac{1}{2n}$$

Contradiction quand $n \rightarrow +\infty$.

LI 17 • Si E est un EVN de dim infinie, tout compact de E est d'intérieur vide.

En effet, si K est un compact d'intérieur non vide, il contient une boule fermée de rayon > 0 . Elle est fermée dans un compact donc compacte.

D'après le théorème de Riesz, E est de dimension finie. Contradiction.

5KA • Dém du théorème 4: On montre que les compacts de $\mathbb{R}^n$
58 sont les fermés-bornés grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass

On le prouve de deux EM est compact ssi les deux EM sont compacts

Ainsi si A fermé-borné de $\mathbb{R}^n$, alors $A \subset [-a, a]^n$ qui est compact. Comme A est fermé dans un compact, A est compact.

IP • Théorème: Les compacts d'un EVN de dim finie
427 sont les parties fermées-bornées.

Preuve: Il est clair que les compacts sont fermés-bornés (pas besoin de la dim finie).
Soit (E, N) notre EVN, et on considère encore la norme N_0 et la fonction f

Soit X un fermé-borné de E pour la norme N .
Par équivalence des normes, X est aussi fermé-borné pour N_0 .

Ainsi $f^{-1}(X)$ est fermé (car f continue) et borné (car f isométrique) dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Ainsi $f^{-1}(X)$ est un compact de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

On f bijection donc $f(f^{-1}(X)) = X$ donc X est un compact pour N_0 comme image d'un compact par une application continue.

Par équivalence des normes, X est aussi un compact ~~de~~ pour N .

Ø • On obtient grâce au théorème de Heine des exemples de fermés-bornés qui ne sont pas

compacts : il suffit de prendre la boule unité fermée dans un EVN de dim finie.

Par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ tel que $\|P\|_\infty = \sup_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ où $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$

On regarde la suite $x_n = (x^n)_{n \geq 0}$

Alors $\|x^n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc cette suite est bien dans la boule unité fermée.

Mais $\forall n \neq m$ on a, $\|x^n - x^m\|_\infty = 1$

Donc on ne pourra pas extraire de sous-suite convergente car deux termes distincts sont toujours à distance égale à 1.

Donc la boule unité fermée n'est pas compacte.