

201
203
209
(228)
264
266

Théorème de Weierstrass par les probabilités

- Intégration - proba, Grillet - Kuntzmann
1995
- Oranx x-ENS 6, FGN p 259
- Suites et séries, El-Amrani, p 158

Def • Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n(f)$ le polynôme de Bernstein
de degré n associé à f :

$$B_n(f)(x) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} x^h (1-x)^{n-h} f\left(\frac{h}{n}\right) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Théorème • La suite de fonctions $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge
uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Dém • Soit $x \in [0, 1]$.

On se donne une suite $(x_h)_{h \geq 1}$ de VA indépendantes
de loi $B(x)$.

On note $S_n = \sum_{h=1}^n x_h \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi $S_n \sim B(n, x)$

On a donc par formule de transfert avec
la fct $x \mapsto f\left(\frac{x}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] &= \sum_{h=0}^n f\left(\frac{h}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = h) \\ &= \sum_{h=0}^n f\left(\frac{h}{n}\right) \binom{n}{h} x^h (1-x)^{n-h} = B_n(f)(x) \end{aligned}$$

Comme $[0, 1]$ est compact et que f est continue,
d'après le théorème de Heine, f est uniformément
continue :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [0, 1],$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On va donc découper en deux parties selon

que $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta$ ou $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta$

On a :

$\|f\|_\infty$ existe car f continue sur un compact donc atteint ses bornes

FGN

$$\begin{aligned}
 |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] - f(x) \right| \\
 &= \left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right] \right| \quad (\text{car } f(x) \text{ est une cste pour } \mathbb{E}) \\
 &\leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] \\
 &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta} \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \right] \\
 &\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta} \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \right] \\
 &\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right] + \mathbb{E}[\varepsilon] \quad \begin{array}{l} \text{On a majoré} \\ \text{l'indicateur par 1} \end{array} \\
 &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \cdot \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right)
 \end{aligned}$$

G-K

On a comme $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x$,
on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right| \geq \delta\right) &\leq \frac{1}{\delta^2} \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
 &\leq \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{n^2} x(1-x)n \quad \begin{array}{l} \text{car } x \in [0,1] \\ \text{donc} \\ x(1-x) \leq \frac{1}{4} \end{array} \\
 &\leq \frac{x(1-x)}{\delta^2 n} \leq \frac{1}{4n\delta^2}
 \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in [0,1]$ et $\forall \varepsilon > 0$:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \|f\|_\infty \frac{1}{2n\delta^2}$$

Comme la majoration ne dépend pas de x ,
on peut passer au sup sur x :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

On passe alors à la limite supérieure quand

$n \rightarrow +\infty$, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

donc en faisant tendre ε vers 0 :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$$

} car $0 \leq \liminf \leq \limsup \leq 0$
donc $\lim = \liminf = 0$

$$\text{Donc : } \|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On a le résultat demandé.

EL-A

Théorème de Weierstrass : Toute fonction f continue sur un compact $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite de fonctions polynômiales.

Dém : Soit e la fonction affine :

$$e: [0; 1] \rightarrow [a; b]$$

$$x \mapsto a + (b-a)x$$

Comme la fct $f \circ e$ est continue sur $[0; 1]$, elle est limite uniforme de la suite (B_n) des polynômes de Bernstein associés.

Donc f est limite uniforme de la suite $(B_n \circ e^{-1})$ qui est bien une suite de fonctions polynômiales car e^{-1} est affine :

$$B_n \circ e^{-1} = B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

On a donc le théorème.

Remarques :

- Le résultat est faux sur un intervalle non

compact de $\mathbb{R}$. En effet, une limite uniforme de fct bornées est bornée. Par ex, $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0, 1]$ donc ne peut pas être lim uniforme de fct polynômiales qui sont elles bornées sur $]0, 1]$.

- Th de Heine: si X est compact et $f: X \rightarrow Y$ continue, alors f est uniformément continue sur X .

Idee de preuve: par l'absurde, prendre $\delta = \frac{1}{n+1}$ et définir 2 suites x_n et y_n . On a $(x_n, y_n) \in X \times X$ qui est compact, donc utiliser Bolzano-Weierstrass.

Abstrait à $0 > \epsilon$. Contradiction

- Th de Stone-Weierstrass: soit X un EM compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ (càd SEV de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ stable par produit) tq:

- A sépare les points de X , càd $\forall x \neq y \in X, \exists a \in A$ tq $a(x) \neq a(y)$ (a dépend de x et y)

- A contient les fct constantes

- A est stable par conjugaison complexe, càd que si $f \in A$, alors $\bar{f}: x \mapsto \overline{f(x)} \in A$

Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ pour d_∞

- Exo: Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ tq $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\mathbb{R}_q f \equiv 0$.

Par linéarité, $\forall P \in \mathbb{R}[x], \int_0^1 P(t) f(t) dt = 0$

Utiliser le th de Weierstrass et:

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f(t) (f(t) - P_n(t)) dt + \int_0^1 f(t) P_n(t) dt$$

$$\leq \int_0^1 f(t) dt \times \|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0. \text{ Donc } \int_0^1 f^2(t) dt = 0$$

Donc $f \equiv 0$