

p130

On pose $I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Ainsi $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$

On fait une IPP:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cdot \sin^{n-2}(x) \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) \cdot \sin x \, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \quad \text{Donc} \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Ainsi: $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} \times \dots \times \frac{1}{2} \times I_0$

donc $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \times \dots \times 1}{2p \times (2p-2) \times \dots \times 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

De même: $I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2) \times \dots \times 2}{(2p+1)(2p-1) \times \dots \times 1} \times \frac{1}{1}$

On remarque que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$$

$$(\sin^{2p+1}(x) - \sin^{2p}(x) = \sin^{2p}(x) [\sin x - 1] \leq 0)$$

donc par intégration: $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$$I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$$

On divise par I_{2p+1} (qui est strict positif):

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p} \quad \text{grâce à } (*)$$

D'après le théorème des gendarmes:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$$

$$\text{On : } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \cdot \frac{(2p+1)(2p-1)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}$$

$$\text{Donc : } (2p+1) \left[\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \right]^2 \frac{\pi}{2} \rightarrow 1$$

On a alors la formule de Wallis :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right]^2 = \pi$$

Ainsi :

$$\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \sim \frac{1}{\sqrt{p\pi}}$$

$$\text{Donc : } I_{2p} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{p\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\text{Et : } I_{2p+1} \sim I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

$$\text{Donc : } I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

BONNE
pas utile pour
démontrer Stirling

p 279

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\text{Soit } u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Soit } v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On estime v_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. On a :

$$v_n = \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \right)$$

$$= \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n e^{-1} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)$$

$$= -1 + \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

* ⚠ Erreur dans le bonbon, v_n n'est pas de signe constant donc il faut utiliser l'ACV de la série pour montrer la CV.

* Ainsi par théorème de comparaison avec une série de Riemann $CV(2 > 1)$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |v_n|$ CV.
Comme $\mathbb{R}$ est complet, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ CV.

$$\text{On peut télescoper, } \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \\ = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_1)$$

Donc la suite $(\ln(u_n))_n$ est CV.

On note λ sa limite.

Erreur dans le bonbon, prendre $\frac{1}{k}$ et pas k .

Ainsi (u_n) converge vers $k' = e^\lambda > 0$.

On pose $k = \frac{1}{k'}$. Alors :

$$n! \sim k \sqrt{n} n^n e^{-n}$$

On calcule la constante k .

On utilise la formule de Wallis et le fait que :

$$\frac{1}{p} \left[\frac{2^p (2p-2) \dots 2}{(2p-1)(2p-3) \dots 1} \right]^2 = \frac{1}{p} \left[\frac{2^p (p!)^2}{(2p)!} \right]^2 \\ \sim \frac{1}{p} 2^{4p} \left(\frac{h^2 p^2 p^2 e^{-2p}}{h \sqrt{2p} (2p)^2 p e^{-2p}} \right)^2 \\ \sim \frac{2^{4p}}{p} \frac{h^4 p^2 p^4 e^{-4p}}{h^2 2p 2^4 p^4 e^{-4p}} = \frac{h^2}{2}$$

Donc : $\pi = \frac{h^2}{2} \Rightarrow h = \sqrt{2\pi}$ par suite de la limite.

On obtient donc :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$