190
230
241
243

Nombres de Bell

- Oraux X-ENS 6, FGN, p 338
- Analyse pour l'agreg, 40 dev, Dernis, p 285

BER **Déf :** pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. Par convention, $B_0 = 1$.

On remarque que compter les relations d'équivalence sur un ensemble revient à compter les partitions de cet ensemble.
Cela revient donc à compter le nombre de partitions de $[\![1; n]\!]$.

FGN On a $B_1 = 1$ (un seul élément)
$B_2 = 2$ (soit tout ensemble, soit chacun séparé)
$B_3 = 5$ (tous ensemble, séparés, un tout seul ($\times 3$))

Pour trouver B_{n+1}, on va classer les partitions en fonction du cardinal de leur élément qui contient l'entier $n+1$.
Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On définit E_k l'ensemble des partitions de $[\![1; n+1]\!]$ dont la partie de $[\![1; n+1]\!]$ contenant le nbr $n+1$ est de cardinal $k+1$ (càd contient k autres éléments).
Ainsi $E_0, E_1, \dots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1; n+1]\!]$.
On cherche le cardinal de E_k :
- pour constituer la partie contenant $n+1$, il faut choisir k éléments dans $[\![1; n]\!]$.
- pour le reste, il faut réaliser une partition des $n-k$ éléments restants.

Donc : $|E_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}$

On obtient finalement :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

$j = n-k$

$k = n-j$

donc $\boxed{B_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$

Pour mq R n'est pas nul, on majore $\frac{B_n}{n!}$.

On montre par réc que $B_n \leq n!$

- pour $n \leq 3$, c'est OK
- $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$$

Ainsi $\frac{B_n}{n!} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc le rayon de CV R de la SE est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, càd 1.

Donc $\boxed{R \geq 1.}$

Soit $z \in]-R; R[$. On calcule $f(z)$.

On a :

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$$

La fct f est dérivable sur $]-R; R[$ et :

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n$$

On reconnait un produit de Cauchy, celui des séries $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$

La première a pour somme $f(z)$ et la 2^e, e^z.
Elles ont toutes les deux un rayon de CV supérieur ou égal à R.
Donc : $\forall z \in]-R; R[$,
$$f'(z) = f(z) \cdot e^z$$
Ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall z \in]-R; R[$, $f(z) = C \cdot e^{e^z}$
Or $f(0) = B_0 = 1$ donc $C = \frac{1}{e}$
Donc :
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}} \quad \forall z \in]-R; R[$$

Or la SE de la fct exponentielle a un rayon de CV infini donc $\forall z \in \mathbb{C}$:
$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{nz}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

On veut échanger les sommes.
On pose $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!\,k!}$ $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2$. On a alors :
$$\text{Alors : } \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{k!}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{|nz|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|z|})^n}{n!} = e^{e^{|z|}} < +\infty$$

D'après le th de F-L :
$$f(z) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$$
$$= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!} \quad \forall z \in]-R; R[$$

⚠ Il manque le $\frac{1}{e}$ dans FGN

D'après l'unicité du DSE, on a alors $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}}$$ formule de Dobinski

<u>Remarques</u> :

- avec les calculs précédents, on a en fait $R = +\infty$

- On observe que B_k correspond au moment d'ordre k d'une $\mathcal{P}(1)$

Par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}[(X+1)^n] = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{(k-1)!}$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{n+1}}{k!} = \mathbb{E}[X^{n+1}]$$

Avec le binôme de Newton :

$$\mathbb{E}[X^{n+1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{E}[X^k]$$

Donc la suite $(\mathbb{E}[X^n])_{n \geq 0}$ vérifie la même relation de rec que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. Comme $B_0 = 1 = \mathbb{E}[X^0]$, les deux suites sont égales.

- $B_4 = 15$ $\quad B_5 = 52$

BER - Autre méthode pour mq $B_n \leq n!$:

On mq $\mathcal{P}_n$ l'ens des partitions de $[\![1;n]\!]$ s'injecte dans S_n

En effet, l'appli qui à une partition $P = \{A_1, \dots, A_p\}$ associe la permutation $c_1 c_2 \dots c_p$ où c_i est le cycle de support A_i, est injective (grâce à l'unicité de la décomposition d'une permutation en $\prod$ de cycles à supports disjoints).

Ainsi $B_n = |\mathcal{P}_n| \leq |S_n| = n!$