223
224
230

Développement asymptotique de la série harmonique

- L'oral à l'agreg, I-P p 380
- Oraux X-ENS 3, FGN p 224

La série harmonique est la série de terme général $\frac{1}{n}$.

On pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \forall n \geq 1$

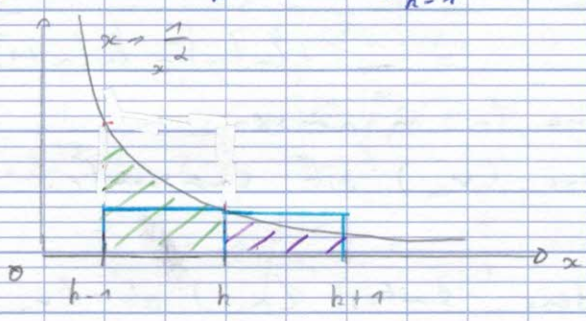
On démontre d'abord un lemme qui donne un équivalent du reste de la série de Riemann dans le cas convergent.

I-P **Lemme 1** : Soit $\alpha > 1$. Alors on a :

$$R(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Dém : On procède par comparaison série-intégrale. Comme $\alpha > 1$, la fct $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors pour $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$



dans le livre ils font entre n et N

On somme alors entre $n+1$ et N, et on fait tendre N vers $+\infty$ (on a le droit car on sait que le reste tend vers 0 car série cv)

D'où :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Or : $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{n+1}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$

et $\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{n}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

γ = constante d'Euler-Mascheroni $\simeq 0{,}577$

On ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel

Comme $n^{\alpha-1} \sim (n+1)^{\alpha-1}$ quand $n \to +\infty$, on a l'équivalent annoncé par encadrement.

I-P **Prop :** Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ tq quand $n \to +\infty$:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

FGN **Dém :** On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$

On a alors :

- $u_n - v_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$

- $u_n - u_{n+1} = \frac{-1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) = \frac{-1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$

  car $\ln(1+x) \leqslant x \quad \forall x > -1$ (dériver pour le montrer) ou convexité

  Donc (u_n) est décroissante

- $v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - H_n + \ln(n) + \frac{1}{n}$

  $= \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$

  pour la m̂ raison.

  Donc (v_n) est croissante.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc CV vers $\gamma \in \mathbb{R}$

OSQ $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n \quad \forall n$ et comme $v_2 = 1 - \ln(2) > 0$ alors $\gamma > 0$.

IP On pose alors $t_n = u_n - \gamma = H_n - \ln(n) - \gamma$.

On cherche un équivalent de $(t_n - t_{n-1})$ pour obtenir un équivalent du reste de la série qui n'est autre que (t_n).

On a :

$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$$

l'ordre 1 ne suffit pas

D'après le critère de Riemann, la STG $t_k - t_{k-1}$ est CV. Par le théorème de sommation des équivalents, o/c les restes sont équivalents.

Ainsi d'après le lemme 1 :

$$-t_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{2k^2} \sim \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

$\alpha = 2$

D'où $t_n \sim \frac{1}{2n}$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On pose alors $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$ et on recommence :

$$w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} \cancel{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \cancel{\frac{-1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Ainsi :

$$-w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1}) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

On obtient donc :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Remarques :

- On peut directement mq $H_n \sim \ln(n)$ avec une

Comparaison série-intégrale.