

44 Théorème fondamental des courbes dans l'espace

ref : Ramis-Deschamps-Odoux 5

THÉORÈME 44.1 *On se place dans un espace affine euclidien orienté E de direction $\vec{E}$ de dimension 3. Soit φ et ψ des applications d'un intervalle I à valeurs réelles. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive et ψ continue. Alors il existe un arc géométrique $\mathcal{C}^3$ orienté et birégulier admettant un paramétrage par longueur d'arc défini sur J dont les courbures et torsions sont respectivement φ et ψ . Deux tels arcs solutions diffèrent d'un déplacement de l'espace.*

PREUVE. idée : une courbe est définie par son vecteur tangent en intégrant. Si on adjoint au vecteur tangent, les vecteurs normaux et binormaux, le trièdre qu'ils forment est solution d'une équation différentielle linéaire, on peut alors utiliser Cauchy-Lipschitz.

Rappel :

Etant donné un arc paramétré par longueur d'arc $\alpha : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^3$ et birégulier ($T' \neq 0$), on rappelle les formules de Serret-Frénet qui donnent l'équation différentielle vérifiée par la base de Frénet : $(T(s), N(s), B(s))$,

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), \quad N'(s) = -\kappa(s)N(s) - \gamma(s)B(s), \quad B'(s) = \gamma(s)N(s)$$

Existence :

Fixons une base orthonormée directe (u_0, v_0, w_0) de $\vec{E}$. Le système différentiel linéaire de $\vec{E}^3$ donné par :

$$U'(s) = \varphi(s)V(s), \quad V'(s) = -\varphi(s)V(s) - \psi(s)W(s), \quad W'(s) = \psi(s)V(s)$$

admet d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, une unique solution (U, V, W) définie sur I telle que $(U(0), V(0), W(0)) = (u_0, v_0, w_0)$.

Montrons qu'alors $(U(s), V(s), W(s))$ est une base orthonormée directe pour tout $s \in \mathbb{R}$. On pose $P(s)$ la matrice 3×3 dont les colonnes sont $(U(s), V(s), W(s))$ dans la base (u_0, v_0, w_0) . On a alors :

$$P'(s) = P(s)A(s) \text{ avec } A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi(s) & 0 \\ \varphi(s) & 0 & \psi(s) \\ 0 & -\psi(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Donc en dérivant $P^t P$, on trouve :

$$(P^t P)' = P'(s)^t P + P(s)^t P' = P A^t P - P A^t P = 0$$

Comme $P^t P = I_n$ en $s = s_0$, $P(s)$ est orthogonale pour tout s et comme $\det(P) > 0$ en $s = s_0$ $P(s)$ reste dans $SO(n)$ par connexité.

On définit alors l'arc α qui passe par α_0 à l'instant s_0 :

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \int_{s_0}^s U(\sigma) d\sigma$$

D'après le système différentiel, on voit que U est $\mathcal{C}^2$ car φ et V sont $\mathcal{C}^1$. Donc l'arc α est $\mathcal{C}^3$. On a $\alpha'(s) = U(s)$, donc U est le vecteur tangent T . Ensuite, $\alpha''(s) = U'(s) = \varphi(s)V(s)$, et comme $V(s)$ est unitaire et $\varphi(s)$ est strictement positive, $V(s)$ est le vecteur normal $N(s)$ et φ est la courbure κ . Enfin, $W(s)$ est le vecteur binormal B car (U, V, W) est une base orthonormée directe, puis, $V'(s) = -\varphi(s)V(s) - \psi(s)W(s)$, donc la torsion γ de cette courbe est ψ .

Unicité à déplacement près :

Si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ est un autre arc solution, par unicité dans Cauchy-Lipschitz, sa base de Frénet (T, N, B) satisfait la même équation différentielle, et la condition initiale s'ajuste par l'unique rotation g de l'espace $\vec{E}$ qui envoie $(T(s_0), N(s_0), B(s_0))$ sur (u_0, v_0, w_0) et le point de départ $\beta(s_0)$ s'ajuste par une translation de vecteur $a = \beta(s_0)\alpha_0$: l'arc $a + g(\beta(s_0)\beta(s))$. On utilise ici le fait que les déplacements agissent transitivement sur les repères orthonormés directs, on peut écrire le déplacement explicitement comme : $f(M) = \alpha_0 + g(\beta(s_0)M)$. $\square$

Leçons concernées : étude métrique des courbes, équa diff linéaire.