

Théorème de Lévy et Théorème central limite

référence : Guille - Onoffe

2619,
262
250
266

Th (Lévy) : Soient $X, X_1, \dots, X_n$ des var. i.i.d. : LASSE :

- 1) $X_n \xrightarrow{L} X$
- 2) $\varphi_{X_n} \xrightarrow{\text{cos}} \varphi_X$

Th (TCL) : Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. dans L^2 tel que $\mu := E[X_1]$ et $\sigma^2 = V(X) > 0$. 2-18?

On note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{cos}} N \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

plan : 1) preuve Lévy. $\boxed{\Rightarrow}$
 $\boxed{\Leftarrow}$

2) Preuve TCL.

1) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $X_n \xrightarrow{L} X$

Par définition de la convergence en loi, $\forall f \in \mathcal{C}_b^0, E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$
En particulier $E[e^{itX_n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[e^{itX}]$ et a $\forall t \in \mathbb{R}$.

i.e. $\varphi_{X_n} \xrightarrow{\text{cos}} \varphi_X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, Soit $f \in \mathcal{C}_b^0$,

"1er cas" $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ plutôt.

c'est-à-dire qu'on dispose de $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{donc } E[f(X_n)] = E\left[\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n} \varphi(t) dt\right]$$

D'après Fubini - Tonelli $(x, t) \mapsto e^{itX_n} \varphi(t) \in L^1$

$$\text{D'après Fubini} = \int_{\mathbb{R}} E[e^{itX_n}] \varphi(t) dt$$

$$\text{D'après le TCD} = \int_{\mathbb{R}} E[e^{itX}] \varphi(t) dt$$

$$= E[f(X)]$$

"2ème cas" Soit $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathcal{C}_b^0$, $\exists h \in \mathcal{C}_c^\infty$ tel que $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$, alors :

$$\begin{aligned} \text{et uniformément dense dans } \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}) \text{ (selon Weierstrass)} \quad |E[f(X_n)] - E[f(X)]| &\leq |E[h(X_n)] - E[h(X)]| \\ &\quad + |E[h(X_n)] - E[f(X_n)]| + |E[h(X)] - E[f(X)]| \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon \end{aligned}$$

et on conclut par le cas d'avant.

2) Il faut montrer que $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer $\mu=0$ et $\sigma=1$

On va montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\text{On a } E[e^{it \frac{S_n}{\sqrt{n}}}] \rightarrow E[e^{itg}] = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Soit $\varphi(t) = E[e^{itX}]$ la fonction caractéristique de X .

Puisque $X \in L^2$, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ (théorème de Riemann).

$$\text{On a } \varphi'(0) = E[iX] = 0$$

$$\varphi''(0) = E[-X^2] = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } E[e^{it \frac{S_n}{\sqrt{n}}}] &= E\left[\prod_{q=1}^n e^{it \frac{X_q}{\sqrt{n}}}\right] \\ &= \prod_{q=1}^n E\left[e^{it \frac{X_q}{\sqrt{n}}}\right] \text{ par indépendance} \\ &= \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \varphi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} \varphi'(0) + \frac{t^2}{2n} \varphi''(0) + \frac{\varepsilon_n}{n} \quad \text{où } \varepsilon_n \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lemme : } \text{Si } z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \\ \text{alors } \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^z \end{array} \right.$$

Donc on pose $z_n = z - \frac{t^2}{2}$ et on voit que

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} = E[e^{itg}]$$

$$\text{donc } \frac{z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} g.$$

$$\text{Donc } P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow P(g \leq x) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge.

Ajouter lemmes indépendance