

Pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on note $\text{Sub}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions σ de $[a, b]$:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall \sigma \in \text{Sub}([a, b])$, $\text{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$.

On dit que f est à variation bornée lorsque $\exists M > 0$ tq $\text{Var}_\sigma(f) \leq M \forall \sigma \in \text{Sub}([a, b])$.

On pose $V_a^b f = \sup \text{Var}_\sigma(f)$

1) Si f est $\mathcal{C}^1$, f est à variation bornée et $V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt$.

2) f est à variation bornée si $\exists g, h$ croissantes tq $f = g - h$.

plan : a) Mq $V_a^b f = \sup_{\sigma \in \text{Sub}([a, b])} \text{Var}_\sigma(f|_{[a, b]})$ si $f|_{[a, b]}$ est à var bornée.

b) Mq il y a la relation de Charles.

c) Montrons 1)

d) Montrons 2)

a) Soit $\sigma : c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d$ une subdivision de $[c, d]$.

Alors $\sigma' : a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ est une subdivision de $[a, b]$ et donc $\text{Var}_\sigma(f|_I) \leq \text{Var}_{\sigma'}(f) \leq M$.

Cette majoration étant valable $\forall \sigma \in \text{Sub}([c, d])$,

$f|_I$ est à variations bornées.

b) On considère deux subdivisions :

$\sigma_1 : x = x_0 < x_1 < \dots < x_p = y \in \text{Sub}([x, y])$

$\sigma_2 : y = y_0 < y_1 < \dots < y_q = z \in \text{Sub}([y, z])$

En les concaténant, on obtient une subdivision σ de $[x, z]$.

Ainsi $\text{Var}_{\sigma_1}(f) + \text{Var}_{\sigma_2}(f) = \text{Var}_\sigma(f) \leq V_x^z f$.

Cette majoration étant valable $\forall \sigma_1 \in \text{Sub}([x, y])$ et $\sigma_2 \in \text{Sub}([y, z])$,

On en déduit $V_x^y f + V_y^z f \leq V_x^z f$ (A)

• Considérons maintenant une subdivision σ de $[x, z]$.

En lui ajoutant le point y si il ne fait pas partie de σ ,

On obtient une subdivision σ' de $[x, z]$ qui vérifie $\text{Var}_\sigma(f) \leq \text{Var}_{\sigma'}(f)$.

On peut noter σ' sous la forme $x = x_0 < x_1 < \dots < x_p = y = y_0 < \dots < y_q = z$.

Considérons alors la subdivision σ_1 et σ_2

On a $\text{Var}_\sigma(f) \leq \text{Var}_{\sigma'}(f) = \text{Var}_{\sigma_1}(f) + \text{Var}_{\sigma_2}(f) \leq V_x^y f + V_y^z f$

Ainsi $V_x^z f \leq V_x^y f + V_y^z f$.

c) Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(t) dt \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |g'(t)| dt$.

donc par somme, $\text{Var}_\sigma(g) \leq \int_a^b |g'(t)| dt$.

Ceci étant vrai pour n'importe lequel, g est à variation bornée

et $V_a^b g \leq \int_a^b |g'(t)| dt$ (B)

Il nous faut maintenant prouver l'inégalité réciproque.

Si $\sigma: a = x_0 < \dots < x_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$

on peut écrire V par le théorème des accroissements finis

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = (x_{i+1} - x_i) g'(\theta_i) \quad \text{avec } \theta_i \in]x_i, x_{i+1}[.$$

$$\text{de sorte que } \text{Var}_\sigma(g) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) |g'(\theta_i)| \quad \text{avec } V, \theta_i \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Cette dernière expression est une somme de Riemann relative à la subdivision σ pour la fonction $|g'|$.

En faisant tendre le pas de σ vers 0, $\text{Var}_\sigma(g) \rightarrow \int_a^b |g'(t)| dt$
d'où $\int_a^b |g'(t)| dt \leq V_a^b g$.

On conclut avec (8.1).

d) $\Rightarrow$ Une fonction croissante $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ad-à variation bornée car

$V_\sigma \in \text{sub}([a, b])$,

$$\begin{aligned} \text{Var}_\sigma(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \\ &= g(b) - g(a). \end{aligned}$$

La différence de deux fcts à variation bornée étant à variation bornée, on a ce qui suit.

$\Leftarrow$ Soit $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\sigma \mapsto V_\sigma g$

D'après b), g est croissante

Posons $h = g - f$.

h est croissante car $\forall x < y, h(y) - h(x) = V_{x,y} g - (f(y) - f(x)) \geq 0$ d'après 2).

$$\text{car } |f(x) - f(y)| \leq V_{x,y} f.$$

$$\text{Ainsi } f = g - h.$$

$\downarrow$
croissantes.