

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Lemme: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

On a alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une constante $\gamma > 0$ (constante d'Euler)

plan: 1) preuve du lemme, dev asymptotique avec 2 terme
2) dev asymptotique avec 3 termes
3) dev asymptotique avec 4 termes

1) • $u_n - v_n = \frac{1}{n} \geq 0$ et $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - H_{n+1} - \ln(n+1) \\ &= -\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

comme $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$. (concavité de $\ln$).

donc $u_n - u_{n+1} \geq 0$

donc (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - (u_{n+1} - u_n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0 \text{ pour la même raison qu'avant} \end{aligned}$$

donc (v_n) est croissante

Ainsi (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Donc ont même limite γ .

$$\text{Comme } v_2 = u_2 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} = 1 - \ln(2) > 0$$

Donc $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Finalement } H_n &= u_n + \ln(n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma + \ln(n) + o(1) \end{aligned}$$

2) $\forall n \geq 4$, on pose $t_n = u_n - \gamma$.

Cherchons un équivalent de $t_n - t_{n-1}$.

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= u_n - \gamma - u_{n-1} + \gamma \\ &= H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } t_n - t_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{2k^2}$ converge et par télescopage $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n$ d'une part

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$ d'autre part,

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est > 0 , $\Rightarrow$, intégrable sur $\mathbb{R}_+ \setminus]0, 1]$,

Par comparaison série intégrale:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

$$\parallel$$

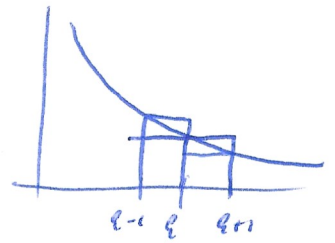
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$$\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

$$\parallel$$

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$$\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$



l'ou intégrale d'un reste convergent ≥ 0 .

Par théorème d'encadrement: $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$

Donc $t_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$

Donc $u_n = t_n + \gamma$
 $\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

On a $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1}) = -w_n$ par télescopage.

pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $w_n - w_{n-1} = t_n - t_{n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$$

$$\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n^3}$$

De même qu'en 2), $-w_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12n^2}$.

On obtient donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$