

# Fonctions caractéristiques de la loi normale et de Cauchy.

Ref: Garet / Kurlz...

La fonction caractéristique de la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$   
est  $\phi_N: t \mapsto e^{imt} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

236

261

245

250

239

La fonction caractéristique de la loi de Cauchy  $\mathcal{C}(a, b)$   
est  $\phi_C: t \mapsto e^{iat} e^{-b|t|}$

plan: 1)  $\phi_X$  pour  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

2) En déduire  $\phi_N$

3)  $\phi_X$  pour  $X \hookrightarrow \mathcal{C}(0, 1)$

4) En déduire  $\phi_C$

1) Rappel: densité de  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ :  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

On cherche la fonction caractéristique de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$

Nous devons calculer  $\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(itx) d\lambda(x)$

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $f_z(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(zx)$

$\forall x \in \mathbb{R}, z \mapsto f_z(x)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

$\forall z \in D(0, R), \forall x \in \mathbb{R}, |f_z(x)| \leq \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(R|x|)$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale. car  $o(e^{-x})$   $x \rightarrow +\infty$

$z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_z(x) d\lambda(x)$  est holomorphe.

Soit  $z \in \mathbb{R}$ :  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(zx) d\lambda(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x-z)^2}{2} - \frac{z^2}{2}) d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x-z)^2}{2}) d\lambda(x) \exp(-\frac{z^2}{2})$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x-z)^2}{2}) d\lambda(x)}_{\text{densité de } \mathcal{N}(z, 1)} = 1$$

$$= \exp(-\frac{z^2}{2})$$

Comme deux fonctions holomorphes égales sur  $\mathbb{R}$  sont égales sur  $\mathbb{C}$ .

On a donc  $\forall z \in \mathbb{C}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(zx) d\lambda(x) = \exp(-\frac{z^2}{2})$ .

Donc pour  $z = it, t \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{on a } \phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(itx) dx = \exp(-\frac{t^2}{2})$$

2) si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , alors  $\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

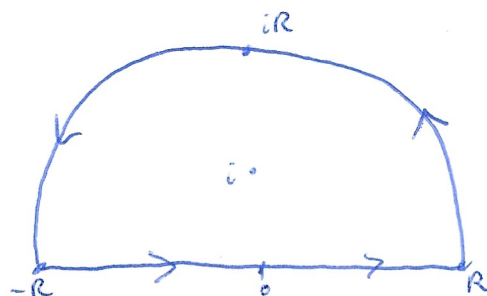
$$\text{donc } \phi_N(t) = e^{imt} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3) Rappel : densité de  $\mathcal{C}(a,b)$  :  $\frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}$

Calculons la fonction caractéristique de  $\mathcal{C}(0,1)$ .

Supposons  $t > 0$ , pour  $R > 1$

on intègre  $f: z \mapsto \frac{e^{itz}}{1+z^2}$  sur le contour  $\gamma_R$  :



Le seul pôle de  $f$  à l'intérieur de la courbe est  $i$ .

$$\text{donc } \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \text{Res}_i(f(z))$$

$$\text{Or } \text{Res}_i f = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2} = \frac{e^{itz}}{(z+i)(z-i)}$$

$$\text{Donc } \text{Res}_i f = \frac{e^{-t}}{2i}$$

$$\text{Ainsi } \forall R > 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_R} f(z) dz = e^{-t}$$

$$\text{Par ailleurs } \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + iR \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

Or pour  $z = Re^{i\theta}$  et  $\sin \theta \geq 0$

$$\text{on a } |f(Re^{i\theta}) e^{i\theta}| = \frac{e^{-Rt \sin \theta}}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{R^2-1}$$

$$\text{Comme } t > 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} iR \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } e^{-t} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{x^2+1} dx \quad \text{fct caractéristique de } \mathcal{C}(0,1) \end{aligned}$$

Comme la loi de  $\mathcal{C}(0,1)$  est symétrique, pour  $t < 0$ ,  $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ .

Comme  $\phi(0) = 1$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = e^{-|t|}.$$

4) Si  $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a,b)$ ,  $\frac{x-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{C}(0,1)$

$$\text{donc } \phi_X(t) = e^{iat} e^{-b|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$