

théorème: Soit $\alpha > 0$ et $f: [0, \alpha] \rightarrow [0, \alpha]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = x - \alpha x^2 + o(x^2) \text{ où } \alpha > 0 \text{ et } \alpha > 1.$$

Alors la suite définie par récurrence: $\begin{cases} u_0 > 0 \text{ assez petit.} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

admet l'équivalent suivant: $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} (n\alpha(\alpha-1))^{-\frac{1}{\alpha-1}}$.

Plan: 1) Mq (u_n) converge vers 0.

2) Mq $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} (n\alpha(\alpha-1))^{-\frac{1}{\alpha-1}}$

3) Application, $f: x \mapsto \sin(x)$ et $f: x \mapsto \ln(1+x)$.

1) Par continuité de f , on a $f(0) = 0$.

Vu le développement asymptotique de f en 0,

On dispose de $\eta > 0$ tq $f(x) < x$ sur $]0, \eta]$.

Si on choisit u_0 dans cet intervalle, (u_n) est décroissante positive.

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 qui est le seul point fixe de f dans $[0, \eta]$.

2) Cherchons β tq $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)$ ait une limite non nulle.

On a un voisinage de 0, puisque $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned} (f(x))^\beta - x^\beta &= (x - \alpha x^2 + o(x^2))^\beta - x^\beta \\ &= x^\beta (1 - \alpha x^{2-1} + o(x^{2-1}))^\beta - x^\beta \\ &= x^\beta (-\alpha \beta x^{2-1} + o(x^{2-1})) \\ &\sim_{x \rightarrow 0} -\alpha \beta x^{2+\beta-1} \end{aligned}$$

Si on prend $\beta = 1 - \alpha$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^\beta - x^\beta = \alpha(\alpha-1)$.

En particulier, comme (u_n) converge vers 0,

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = \alpha(\alpha-1).$$

Le théorème de Cesaro donne alors: $u_n^{1-\alpha} \sim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \sim_{n \rightarrow \infty} n\alpha(\alpha-1).$

Donc $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} (n\alpha(\alpha-1))^{-\frac{1}{\alpha-1}}$.

3) Considérons $f: x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$[0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par la fonction sinus

Pour $x > 0$, on a $\sin(x) < x$.

On en déduit que si $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, (u_n) $\searrow$ et converge vers l'unique point fixe de la fonction sinus, 0.

Or un DL de sinus en 0 est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\text{ici } \alpha = \frac{1}{6} \text{ et } \alpha = 3$$

$$\text{Donc } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}}$$

De même, $f: x \mapsto \ln(1+x)$

$\mathbb{R}_+$ est stable par f .

$\forall x > 0$, $\ln(1+x) < x$.

Donc si $u_0 \in \mathbb{R}_+$, (u_n) $\searrow$ et converge vers 0 unique point fixe de f .

Cette fois le DL de f en 0 est

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{ici, } \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = 2$$

$$\text{donc } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n}$$