

Les états de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^k$ sont récurrents ssi $k=1$ ou 2 , ou $k=0$ (trivial), transients ssi $k \geq 3$

plan: On détermine $P_k^n(x, x) = P(X_n = x | X_0 = x)$ et étudier la convergence de la série $\sum_n P_k^n(x, x)$.
1) $k=1$
2) $k=2$
3) $k=3$ ($k \geq 3$)

1) La probabilité de retour en x en $2n$ pas est égal à $P(X = n)$ ou $X \sim B(2n, \frac{1}{2})$.

Donc $P_1^{2n}(x, x) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \binom{2n}{n} \times \frac{1}{2^{2n}}$
et $P_1^{2n+1}(x, x) = 0$

$E_x(N(x)) = \sum_{n \geq 1} n P_1^{2n}(x, x)$ où T_x est la place, on l'écrit normalement.
= $\sum_{n \geq 1} E[n | T_{2n} = x]$ d'après le théorème de convergence monotone.
= $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{1}{2^{2n}}$

On pose la formule de Stirling, $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{e^n e^n (2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{n^n \sqrt{2\pi n} n^n \sqrt{2\pi n} e^{2n} \times 2^{2n}}$
 $\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ terme général de série divergente.

Donc $\forall x, E_x(N(x)) = +\infty$
Donc tout état est récurrent.

2) Le retour en x ne peut se faire qu'un nombre pair de pas.
Chaque direction étant équiprobable (horizontal et vertical).

À n fixé, on note A_{2m}^{2n} l'évènement: $\hat{n}$ $2m$ pas horizontal parmi $2n$ pas.

$P(A_{2m}^{2n}) = \binom{2n}{2m} \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{1}{2^{2n-2m}} = \binom{2n}{2m} \times \frac{1}{2^{2n}}$

Or $P_x(X_{2n} = x) = \sum_{m=0}^n P(X_{2n} = x | A_{2m}^{2n}) P(A_{2m}^{2n})$ d'après la formule des probabilités totales

Or, revenir en $x = (x_1, x_2)$ en $2n$ pas dont $2m$ suivant l'axe horizontal est équivalent à:
la projection projeté suivant l'axe horizontal revient en x_1 en $2m$ pas et projeté sur l'axe vertical, revient en x_2 en $2n - 2m$ pas.

D'où $P_x(X_{2n} = x | A_{2m}^{2n}) = P_1^{2m}(x_1, x_1) P_1^{2n-2m}(x_2, x_2)$

Donc $P_2^{2n}(x, x) = P_x(X_{2n} = x)$
= $\sum_{m=0}^n \binom{2n}{2m} \frac{1}{2^{2n}} \times \binom{2n-2m}{2m} \times \frac{1}{2^{2n-2m}} \times \binom{2n}{2m} \frac{1}{2^{2n}}$
= $\sum_{m=0}^n \frac{1}{4^{2m}} \times \frac{(2m)! (2n-2m)! \times (2n)!}{m! m! (n-m)! (n-m)! (2n)! (2n-2m)!} \times \frac{n! n!}{n! n!}$
= $\sum_{m=0}^n \frac{1}{4^{2m}} \binom{2n}{n} \binom{n}{m}^2$

Comme $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$, $\frac{\binom{n}{n-m}}{2^{2n}} = \binom{n}{m} \times \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{n-m} \times \frac{1}{2^n}$
= proba qu'en $2n$ lancers, on obtienne m au cours des n premiers lancers et $n-m$ piles au cours des n derniers.

Donc $\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \binom{n}{n-m} \frac{1}{2^{2n}} = \text{est probab d'obtenir exactement } n \text{ pile} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

$$\text{Donc } P_2^n(x, x) = \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} = (P_1^{2n}(x, x))^2 \sim \frac{1}{\pi n}.$$

Donc $E_x(N(n)) = \sum_{n \geq 1} P_2^n(x, x) = +\infty$ donc x est récurrent.

3) On revient en x après $2n$ pas si pour chaque direction il y a tout de +1 que de -1 (probab $\frac{1}{2^n}$).

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_2^{2n}(0, \dots, 0) &= P_0(X_{2n}=0) \\ &= \frac{1}{(2^n)^{2n}} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{(2n)!}{(n_1! \dots n_k!)^2} \quad (\text{coefficient multinomial}) \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \left(\frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \left(\frac{1}{2^n} \right)^n \right)^2 \end{aligned}$$

n_1 avant
 n_2 arrière
 n_3 gauche
 n_4 droite

Soit C_n le maximum de $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$ lorsque $n_1 + \dots + n_k = n$.

$$\text{Comme } \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \times \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right)^n = 1. \quad \text{Formule des multinômes de Newton.}$$

2 fois.

$$\text{On a } P_2^{2n}(0, \dots, 0) \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{C_n}{2^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ cf 1).}$$

Donc on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0, P_2^{2n}(0, \dots, 0) \leq \frac{C_n}{2^n \sqrt{n}}$.

Reste à trouver la valeur de C_n .

On effectue la D.E de n par k : $n = kl + r$ avec $l \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, k-1]$.

Max le max est atteint pour des n_i tq $l \leq n_i \leq l+1$.

En effet, $\sum_{i=1}^k n_i = n$ et si $n_i < l$, on aura un n_j (n_2 par exemple) tq $n_j \geq l+1$.

$$\text{d'où } \frac{n!}{(n_1+1)!(n_2-1)!n_3! \dots n_k!} = \frac{n_2}{n_1+1} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} > \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

$$\text{Donc } C_n = \frac{n!}{(l!)^{k-r} ((l+1)!)^r}$$

$$\text{En particulier } \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{n+1}{l+1} \leq k.$$

Donc $\left(\frac{C_n}{2^n} \right)$ est décroissante.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{C_n}{2^n \sqrt{n}} &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=kl}^{k(l+1)-1} \frac{C_n}{2^n \sqrt{n}} \quad \text{en posant } C_0 = 0. + \text{ sommation par paquets.} \\ &\leq \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=kl}^{k(l+1)-1} \frac{C_n}{2^n} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{C_n}{2^n \sqrt{n}} \quad \text{car } \forall l \geq 1, \forall n \in [kl, k(l+1)-1], n \geq l. \\ &\leq \sum_{l=0}^{+\infty} k \frac{C_{kl}}{2^{kl} \sqrt{l}} + A. \quad \text{car } \left(\frac{C_n}{2^n} \right) \searrow. \end{aligned}$$

$$\text{On } \frac{C_{kl}}{2^{kl} \sqrt{l}} = \frac{(kl)!}{2^{kl} (l!)^k \sqrt{l}} \sim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} l^{\frac{k-1}{2}}} \quad (\text{Stirling}).$$

Donc $\sum P_2^{2n}(0, \dots, 0)$ converge

donc 0 est transient.

idem pour x .