Décomposition LU et décomposition de Cholesky

Rd Allan 162 154 157

Théorème 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont toutes les sous matrices d'ordre k diagonales soient inversibles.
$\exists ! (L,U)$ avec $L \in T_n^i(\mathbb{K})$, $U \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $L_{ii} = 1 \ \forall i \in [\![1,n]\!]$
tel que $A = LU$

Théorème 2 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{K})$. $\exists ! B \in T_n^+$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B_{ii} > 0$ et $A = BB^*$ ★

1) **Existence :** Supposons qu'au cours de l'élimination de Gauss il n'y ait pas eu besoin de faire de permutation pour changer de pivot : i.e. les pivots naturels $a_{kk}^k \neq 0$

Alors $A^n = E^{n-1} \dots E^1 A$, où $E^k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & 1 & \\ & & -l_{k+1,k} & \ddots \\ & & \vdots & & 1 \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$ et $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$

On pose $U = A^n$, $L = (E^1)^{-1} \times \dots \times (E^{n-1})^{-1}$.

On a alors $A = LU$.

Reste à vérifier que L est triangulaire inférieure :

$(E^k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & 1 & \\ & & +l_{k+1,k} & \ddots \\ & & \vdots & & 1 \\ & & +l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$

Via calcul, L est triangulaire inférieure et son k-ième colonne est la k-ième colonne de $(E^k)^{-1}$.

$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{2,1} & \ddots & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$

Il faut maintenant vérifier que les pivots ne s'annulent pas sous l'hypothèse faite sur les matrices Δ^k.

On le fait par récurrence.

$k=1$: le premier pivot est non nul car $= \det \Delta^1$ est inversible.

$k \geq 2$: On suppose que les pivots jusqu'à l'ordre $k-1$ sont non nuls.

On peut donc calculer A^k sans encombre.

Donc $(E^1)^{-1} \dots (E^{k-1})^{-1} A^k = A$

i.e. $\begin{pmatrix} L_{11}^k & 0 \\ L_{21}^k & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^k & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Donc $L_{11}^k \times U_{11}^k = \Delta^k$.

L_{11}^k : k lignes, k colonnes ; U_{11}^k : k lignes, k colonnes

donc L_{11}^k et U_{11}^k sont carrées

donc $U_{11}^k = (L_{11}^k)^{-1} \Delta^k \in GL_k(\mathbb{K})$.

donc $\det U_{11}^k = \prod_{i=1}^{k} a_{ii}^i \neq 0$. donc $a_{kk}^k \neq 0$. Or $\prod_{i=1}^{k-1} a_{ii}^i \neq 0$,

2) Unicité 1 : Supposons qu'on ait deux décompositions LU : $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$.

Donc $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$

$L_2^{-1} \in T_n^+$ et $U_1^{-1} \in T_n^+$

Donc $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = D$ où D diag (composée de 1) donc $= I_n$.

Donc $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

3) Existence 2 : D'après 1) et 2), on dispose d'un unique (L, U) tq $A = LU$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $D = \mathrm{diag}(\sqrt{u_{i,i}})$

↳ il est possible de prendre la racine carrée des éléments de U car

$\forall q$, $\prod_{i=1}^{q} u_{i,i} = \det \Delta^q > 0$ cf 1).

On pose $B = LD$ et $C = D^{-1} U$

$A = BC$.

Comme $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = A^*$

Donc $C(B^*)^{-1} = B^{-1}(C^*)$

Or $C(B^*)^{-1} \in T_n^+$ et $B^{-1}(C^*) \in T_n^-$.

donc elles sont diagonales.

De plus les éléments diagonaux de B et C sont les mêmes

donc la diag de $B^{-1} C^*$ n'est constitué que de 1.

Donc $C(B^*)^{-1} = B^{-1} C^* = I_n$

Donc $C = B^*$.

4) Unicité 2 : Supposons que $A = B_1 B_1^* = B_2 B_2^*$

donc $B_2^{-1} B_1 = B_2^* (B_1^*)^{-1}$.

donc $\exists D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ telle que $B_2^{-1} B_1 = D$ avec $d_i > 0$

donc $B_1 = B_2 D$

Donc $A = B_2 B_2^* = B_2 (D D^*) B_2^*$

Comme $B_2 \in GL_n(\mathbb{R})$, $D^2 = I_d$ donc $d_i = \pm 1$.

Or $d_i > 0$ par hypothèse sur Cholesky.

donc $d_i = 1$

donc $B_1 = B_2$