

Décomposition de Dunford

Je ne le mets pas dans des notes, ni dans dimension, ni dans auto-annulation.

P.d. Gourdon
150
152
154
156
158
160

Soient E un K -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme: Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in K[X]$ un polynôme annulateur de f .

On écrit $F = \beta \pi_1^{\alpha_1} \dots \pi_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $K[X]$.

$\forall i \in \{1, s\}$, on note $N_i = \ker \pi_i^{\alpha_i}(f)$.

On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et $\forall i \in \{1, s\}$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f .

Théorème: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et son polynôme caractéristique P_f soit scindé sur K . $\exists!$ (d, u) couple d'endomorphismes tel que: 1) d est diagonalisable et u est nilpotente.

$$2) f = d + u$$

$$3) d \circ u = u \circ d$$

De plus, d et u sont des polynômes en f .

Plan: 1) Lemme: a) exhiber des projecteurs p_i

b) Montrer que leur image est N_i

$$c) \pi_j(\ker(p_i)) = \bigoplus_{j \neq i} N_j, \forall i \in \{1, s\}.$$

2) Théorème: a) Existence

b) Unicité.

3) Application calcul d'exponentielle.

1) D'après le lemme des noyaux $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$.

$$\text{Pour } i \in \{1, s\}, Q_i := \prod_{j \neq i} \pi_j^{\alpha_j}. \text{ On a } \text{PGCD}(Q_1, \dots, Q_s) = 1.$$

D'après Bézout, on trouve de $U_1, \dots, U_s \in K[X]$ tel $U_1 Q_1 + \dots + U_s Q_s = 1$

$$\text{Donc } \text{Id}_E = U_1(f) \circ Q_1(f) + \dots + U_s(f) \circ Q_s(f).$$

$$\text{Pour } i \in \{1, s\}, \text{ on pose } p_i = U_i Q_i \text{ et } p_i = p_i(f), \text{ on a donc } \text{Id}_E = \sum_{i=1}^s p_i. \quad (*)$$

$$\text{Par ailleurs, } \forall j \neq i, F \mid Q_i Q_j \text{ donc } p_i \circ p_j = U_i Q_i(f) \circ Q_j U_j(f) = U_i U_j(f) \circ Q_i Q_j(f) = 0 \quad **$$

$$\text{D'après } (*), p_i = \sum_{j=1}^s p_i \circ p_j \quad \forall i \in \{1, s\}$$

$$= p_i^2 \quad \text{d'après } (**)$$

donc p_i est un projecteur.

b) soit $i \in \{1, s\}$, $y = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$.

$$\begin{aligned} \square \text{ On a } \pi_i^{\alpha_i}(y) &= \pi_i^{\alpha_i}(f) \circ p_i(f)(x) \\ &= \pi_i^{\alpha_i}(f) \circ U_i Q_i(f)(x) \\ &= U_i(f) f \circ F(f)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{Im}(p_i) \subseteq \ker \pi_i^{\alpha_i}(f) = N_i.$$

$\square$ Réciproquement, soit $x \in N_i = \ker \pi_i^{\alpha_i}(f)$.

D'après (*), $x = p_1(x) + \dots + p_s(x)$.

$$\text{Or } \forall j \neq i, p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0 \text{ car } \pi_i^{\alpha_i} \mid Q_j$$

$$\text{Finalement } x = p_i(x) \in \text{Im}(p_i).$$

c) Soit $j \neq i$. On a $N_j \subset \ker(p_i)$ car $n \in N_j$, donc $p_i(n) = U(f) \circ Q_i(f)(n) = 0$.

car $M_j \cdot d_j \mid Q_i$.

Donc $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \ker(p_i)$

Soit $x \in \ker(p_i)$. D'après $\textcircled{D}$, $x = \sum_{j \neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

Noter
=
pour
la pa
dimension

2) a) On écrit $X_f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{d_i}$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $N_i = \ker(f - \lambda_i)^{d_i}$.

D'après le lemme, en conservant les notations précédentes $M_i = (X - \lambda_i)^{d_i}$, $p_i = p_i \circ f$ est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$.

On pose $d = \sum_{i=1}^n d_i p_i$ diagonalisable car $p_i \circ f_j = p_j \circ p_i$ et p_i diagonalisable $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.
Ainsi les p_i sont co-diagonalisables.

On pose $u = f - d$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u|_{N_i} = f|_{N_i} - \lambda_i \text{Id}_{N_i}$ donc $n|_{N_i}^{d_i} = 0$.

Si on pose $q = \max d_i$, u est nilpotent d'indice $\leq q$.

Ainsi combinés, d et u sont des polynômes en f .

b) Supposons qu'il existe (d', u') un autre couple qui vérifie le théorème.

$$f = d + u = d' + u'$$

d' commute avec d et u' donc avec f donc avec d .

de même, u' commute avec u .

Donc d et d' sont co-diagonalisables.

Donc $d - d'$ diagonalisable et $u - u'$ nilpotente (binôme de Newton)

Donc $u - u' = d - d'$ diag et nilpotent donc $= 0$.

3) $f = d + u$ Comme d et u commutent $\exp(f) = \exp(d) \exp(u)$

Si on a une base B de diag de d , $[\exp(d)]_B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

$$\exp(u) = \sum_{p=0}^{q-1} \frac{1}{p!} u^p$$

Dans la pratique : $d = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ et $u = \sum_{i=1}^n (f - \lambda_i \text{Id}) p_i$

$$\forall q \in \mathbb{N}, d^q = \sum_{i=1}^n \lambda_i^q p_i$$

$$\text{donc } \exp(d) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^k}{k!} p_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} \right) p_i = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i} p_i$$

$$\text{et } \exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(f - \lambda_i \text{Id})^k}{k!} p_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{(f - \lambda_i \text{Id})^k}{k!} \right) p_i$$

$$\text{Finalement, } \exp(f) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{(f - \lambda_i \text{Id})^k}{k!} \right) p_i$$

OSEF